

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Spécialité :  
**MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL**

Présentée à l'École Normale Supérieure de Cachan  
par

**Ludovic VINCENT**

pour obtenir le grade de  
**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Sujet de la thèse :  
**Une amélioration de la description du phénomène de déformation  
progressive dans les métaux par la prise en compte de la distorsion  
du domaine d'élasticité**

Thèse soutenue le 18 Octobre 2002 devant le jury composé de :

GEORGES CAILLETAUD	Président
PATRICK DELOBELLE	Rapporteur
PHILIPPE PILVIN	Rapporteur
XAVIER FEAUGAS	Examineur
TADEUSZ KURTYKA	Examineur
FRÉDÉRIC RAVEL	Examineur
SYLVAIN CALLOCH	Directeur de thèse
DIDIER MARQUIS	Directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie  
(ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6)  
61 Avenue Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)



## Remerciements

Ce travail de thèse a été réalisé au Laboratoire de Mécanique et Technologie sous la direction de Didier Marquis et Sylvain Calloch. Je remercie Didier pour ses conseils et l'autonomie qu'il a su m'accorder. Un grand grand merci à Sylvain pour sa très grande disponibilité tout au long de ces trois années, son aide précieuse, notamment devant une machine d'essais, et les nombreux échanges que nous avons eu sur nos activités de recherche et d'enseignements sans oublier ceux que nous avons eu de part et d'autre d'un filet de tennis... Merci beaucoup pour cette confiance et cette amitié partagée.

Je remercie sincèrement Monsieur Georges Cailletaud qui m'a fait le très grand honneur de présider mon jury, Messieurs Patrick Delobelle et Philippe Pilvin pour avoir soigneusement rapporté sur mon manuscrit et Messieurs Xavier Feaugas, Frédéric Ravel et Tadeusz Kurtyka pour avoir accepté avec beaucoup d'amabilité d'examiner mon travail. Je remercie également Philippe pour son aide dans l'utilisation du modèle polycristallin et Tadeusz pour son accueil très chaleureux au CERN et les échanges fructueux que nous avons eu sur le modèle à distorsion.

Merci à tous les membres du laboratoire qui ont contribué à son ambiance si agréable et à tous ceux qui m'ont aidé, en particulier : Marc F., David D., Laurent C., Michel C., Pierre G., Ahmed B., Jean-Pierre C., Patrick K., Laurent B., Olivier A., Yann M., Laurent D., François H., Pierre-Alain B., Philippe S., David N, ...

Une mention spéciale pour Xavier Fayolle que je remercie pour tout le travail de pilotage des essais de détections de surface seuil.

Enfin, j'adresse ces dernières lignes à Nathalie. J'espère un jour pouvoir te remercier pour tout le travail de relecture que tu as accomplies mais surtout pour avoir toujours su m'encourager et être là dans les moments difficiles comme dans les moments plus heureux, et enfin pour tout l'amour que tu n'as eu de cesse de m'apporter.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Phénomène de rochet</b>	<b>7</b>
1.1 Description du phénomène de rochet . . . . .	9
1.1.1 Influence de l'écrouissage cyclique du matériau . . . . .	10
1.1.2 Influence de la viscosité et de la température . . . . .	10
1.1.3 Influence du trajet de chargement mécanique . . . . .	12
1.1.4 Conclusion . . . . .	17
1.2 Observations microscopiques . . . . .	20
1.2.1 Présentation du matériau . . . . .	20
1.2.2 Chargements uniaxiaux . . . . .	21
1.2.3 Chargements multiaxiaux non-proportionnels . . . . .	26
1.2.4 Conclusion sur les mécanismes physiques liés à la déformation progressive . . . . .	28
1.3 Modèles phénoménologiques . . . . .	29
1.3.1 Modèles macroscopiques . . . . .	29
1.3.2 Modèles micro-macro . . . . .	37
<b>2 Distorsion du domaine d'élasticité</b>	<b>45</b>
2.1 Mise en évidence expérimentale . . . . .	47
2.1.1 Cas uniaxial - Choix d'une limite d'élasticité . . . . .	47
2.1.2 Cas multiaxial . . . . .	49
2.1.3 Normalité de l'écoulement plastique au domaine d'élasticité . . . . .	55
2.1.4 Évolution de la distorsion des surfaces seuil au cours du char- gement . . . . .	55
2.2 Modélisation de la distorsion des surfaces seuil . . . . .	59
2.2.1 Introduction . . . . .	59
2.2.2 Modèles à distorsion basés sur des tenseurs d'anisotropie d'ordre impair . . . . .	63
2.2.3 Modèles à distorsion basés sur une description géométrique des surfaces seuil . . . . .	71
2.2.4 Bilan des modèles à distorsion . . . . .	84

<b>3</b>	<b>Rochet 2D et distorsion du domaine d'élasticité</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Version simplifiée proposée par Kurtyka et Życzkowski . . . . .	90
3.2.1	Nouvelles lois d'évolution pour le modèle à distorsion . . . . .	90
3.2.2	Formulation viscoplastique du modèle . . . . .	94
3.2.3	Identification du modèle à distorsion avec un modèle polycristallin . . . . .	97
3.2.4	Etude de l'évolution de la distorsion lors d'un trajet de rochet 2D . . . . .	103
3.2.5	Bilan . . . . .	110
3.3	Modification du modèle à distorsion . . . . .	112
3.3.1	Une nouvelle simplification du modèle [Vincent <i>et al.</i> 01a] [Vincent <i>et al.</i> 01b] . . . . .	112
3.3.2	Étude de la convexité de la surface seuil . . . . .	114
3.3.3	Cadre viscoplastique . . . . .	121
3.3.4	Identification du nouveau modèle à distorsion avec le modèle polycristallin . . . . .	121
3.3.5	Identification du modèle à distorsion avec un acier inoxydable 316L . . . . .	130
3.4	Conclusion . . . . .	138
<b>4</b>	<b>Extension du modèle 2D à des trajets quelconques</b>	<b>141</b>
4.1	Introduction . . . . .	142
4.2	Loi d'évolution pour la matrice de rotation $\mathbb{Q}$ . . . . .	143
4.2.1	Forme adéquate du tenseur "taux de rotation" du repère mobile . . . . .	143
4.2.2	Intégration de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile . . . . .	146
4.2.3	Choix du deuxième vecteur utilisé pour construire le tenseur taux de rotation . . . . .	151
4.3	Identification du modèle 5D sur des essais biaxiaux . . . . .	153
4.4	Identification sur des essais de dimension supérieure à 2 . . . . .	153
4.5	Conclusion . . . . .	161
<b>5</b>	<b>Vers un essai de structure de type rochet de contact</b>	<b>165</b>
5.1	Introduction . . . . .	166
5.2	Présentation des moyens d'essais . . . . .	167
5.3	Principe de l'essai de rochet de contact . . . . .	168
5.4	Précautions particulières . . . . .	171
5.5	Premiers résultats et perspectives . . . . .	171
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>174</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>179</b>

---

<b>Annexes</b>	<b>188</b>
<b>A Nouvelle loi de rotation du repère mobile pour la version simplifiée proposée par Kurtyka et Życzkowski</b>	<b>189</b>
<b>B Utilisation de <math>\underline{n}_F</math> pour piloter la rotation du repère mobile</b>	<b>195</b>
<b>C Article accepté dans la revue Journal of Engineering Materials and Technology</b>	<b>201</b>



# Table des figures

1.1	Les trois types de comportement sous sollicitation cyclique autour d'une contrainte moyenne non nulle . . . . .	9
1.2	Influence de l'écrouissage cyclique du matériau sur le pas de rochet uniaxial . . . . .	11
1.3	Influence de la température sur la vitesse de rochet en traction / torsion d'un acier inoxydable 17-12 Mo-SPH, d'après [Delobelle 89] . . . . .	11
1.4	Influence des paramètres de chargement mécaniques sur le rochet uniaxial d'un acier inoxydable de type 316L . . . . .	13
1.5	Influence de l'histoire de chargement sur le rochet uniaxial d'un acier 1070, d'après [Jiang et Sehitoglu 94] . . . . .	14
1.6	Influence des paramètres de chargement mécaniques sur le rochet biaxial d'un acier inoxydable de type 316L, d'après [Delobelle 89] . . . . .	15
1.7	Comparaison des réponses d'un acier inoxydable de type 316L à des essais de rochet 2D par palier unique ou par paliers successifs, d'après [Clément <i>et al.</i> 84] dans [Portier 99] . . . . .	16
1.8	Influence de la non-proportionnalité du chargement secondaire sur la réponse d'un acier inoxydable 316L, d'après [Bocher <i>et al.</i> 01], avec $\sigma_{\theta\theta} = 50$ MPa, $\epsilon_{ZZ} = \epsilon_{ZZmax} \cos(\omega t)$ et $\epsilon_{\theta Z} = 2/\sqrt{3}\epsilon_{ZZmax} \cos(\omega t - \delta)$ . . . . .	17
1.9	Influence d'une variation de contrainte primaire au cours du cycle sur le rochet biaxial d'un acier 1020, d'après [Corona <i>et al.</i> 96] . . . . .	18
1.10	Déformation progressive d'un acier 1070 dans une direction différente de la contrainte moyenne du chargement, d'après [Jiang et Sehitoglu 94].	18
1.11	Liste des différentes microstructures développées en traction monotone et en fatigue à déformation plastique imposée, d'après [Gaudin 02]	22
1.12	Partition de l'écrouissage cinématique macroscopique (Xmacro) entre contraintes internes intragranulaires (Xintra) et contraintes internes intergranulaires (Xinter), d'après [Feaugas et Gaudin 01] . . . . .	23
1.13	Synthèse des évolutions de l'amplitude de déformation plastique $\epsilon_a$ et de la vitesse de rochet $d\epsilon_r/dN$ , en fonction de la contrainte macroscopique maximale au cours du cycle $\Sigma_{max}$ et de la contrainte macroscopique moyenne au cours du cycle $\Sigma_{moy}$ , d'après [Gaudin 02] . . . . .	25
1.14	Courbe d'écrouissage avec décharges et recharges sur un alliage d'Aluminium AU4G, d'après [Lemaitre et Chaboche 88] . . . . .	30

1.15	Simulation d'un essai de rochet uniaxial avec un écrouissage isotrope	31
1.16	Simulation du phénomène de rochet avec un écrouissage cinématique linéaire, d'après [Lemaitre et Chaboche 88] . . . . .	32
1.17	Propriétés cycliques intéressantes de l'écrouissage cinématique non-linéaire proposé dans [Armstrong et Frederick 66], d'après [Lemaitre et Chaboche 88] . . . . .	33
1.18	Utilisation de 3 variables cinématiques pour décrire l'écrouissage monotone d'un matériau, d'après [Lemaitre et Chaboche 88] . . . . .	34
1.19	Décalage nécessaire vers $\sigma_{ZZ} > 0$ du domaine d'élasticité de von Mises par rapport au domaine d'élasticité expérimental pour obtenir la même direction d'écoulement plastique . . . . .	37
1.20	Principe de fonctionnement du modèle polycristallin . . . . .	38
1.21	Identification du modèle polycristallin sur des essais d'écrouissage uniaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97] . . . . .	41
1.22	Identification du modèle polycristallin sur des essais de rochet uniaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97] . . . . .	42
1.23	Identification du modèle polycristallin sur des essais de rochet multiaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97] . . . . .	42
2.1	Définition de limite d'élasticité par la méthode de l'"offset" . . . . .	49
2.2	Détection de surfaces seuil après un essai de traction sur un alliage d'aluminium, d'après Rousset [Rousset 85]. L'ellipse représente le domaine d'élasticité initiale. . . . .	52
2.3	Stratégie de détection des points de la surface seuil . . . . .	52
2.4	Évolution de la déformation plastique lors d'une détection de surfaces seuil . . . . .	53
2.5	Stratégie de recherche du centre de détection d'une surface seuil . . . . .	54
2.6	Surfaces seuil A obtenue après une précharge en torsion ( $\tau > 0$ ) et B, obtenue après une décharge de 0,5% de déformation plastique suite à une précharge en torsion de sens opposé à A ( $\tau < 0$ ), d'après [Stout <i>et al.</i> 85] . . . . .	56
2.7	Surfaces seuil obtenues après une prédéformation en traction de 0,2% sur un acier inoxydable 304L, d'après [Wu et Yeh 91] . . . . .	57
2.8	Détection de surfaces seuil suite à un trajet carré non-proportionnel sur un alliage d'Aluminium AU4G, d'après [Rousset 85]. Les flèches représentent les directions d'écoulement plastique. . . . .	58
2.9	Détection de surfaces seuil au cours d'un trajet de Rochet 2D sur un acier inoxydable 316L . . . . .	60
2.10	Influence des coefficients $a_1$ et $b_1$ sur la distorsion du domaine d'élasticité . . . . .	64
2.11	Influence des coefficients $a_3$ , $b_3$ , $c_3$ et $d_3$ sur la distorsion du domaine d'élasticité . . . . .	65

2.12	Introduction d'un repère mobile pour définir la distorsion des surfaces seuil . . . . .	66
2.13	Modèle de Phillips, d'après [Phillips et Weng 75] . . . . .	67
2.14	Influence des coefficients $\beta$ et $n$ dans le modèle de Rousset [Rousset 85] . . . . .	68
2.15	Modèle à distorsion de François [François 01] . . . . .	69
2.16	Modèle de Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91] . . . . .	73
2.17	Influence des coefficients $\rho_2$ et $\rho_3$ dans le modèle de Ortiz et Popov, [Ortiz et Popov 83] . . . . .	74
2.18	Construction polaire d'une ellipse . . . . .	75
2.19	Construction polaire d'un domaine d'élasticité distordu . . . . .	76
2.20	Paramètres utiles pour le calcul de l'équation de la surface seuil . . . . .	78
2.21	Surface seuil obtenue avec la version simplifiée du modèle proposée par Kurtyka et Życzkowski . . . . .	80
2.22	Exemple de construction d'une courbe non-convexe avec le modèle général . . . . .	81
3.1	Surface seuil obtenue avec la version simplifiée du modèle de Kurtyka et Życzkowski . . . . .	90
3.2	Identification du modèle à distorsion proposé par [Kurtyka et Życz- kowski 96] sur des surfaces seuil obtenues au cours d'un trajet mono- tone non-proportionnel (sans décharge élastique) par Bui [Bui 66] . . . . .	93
3.3	Lois d'évolution pour l'angle $\phi$ . . . . .	94
3.4	Influence de la forme de la surface seuil sur la définition des surfaces équipotentielles . . . . .	95
3.5	Point de départ ( $M_0$ ou $M'_0$ ) pour le processus de minimisation . . . . .	97
3.6	Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur une simulation de traction monotone . . . . .	100
3.7	Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur des simulations cycliques uniaxiales . . . . .	101
3.8	Évolution des surfaces seuil détectées avec le modèle polycristallin entre le premier et le dernier cycle d'une simulation d'écrouissage cy- clique uniaxial, où $\varepsilon = \pm 0,5\%$ . . . . .	102
3.9	Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur une simulation de rochet 2D. Simulation du même trajet avec le "mo- dèle de Mises" . . . . .	102
3.10	Évolution de la distorsion au cours du dernier cycle d'un trajet de ro- chet 2D, $\sigma_{11} = 80$ MPa, $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$ . . . . .	104
3.11	Évolution du domaine de Mises au cours du dernier cycle d'un trajet de rochet 2D, $\sigma_{11} = 80$ MPa, $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$ . . . . .	105
3.12	Simulation d'une compression pure ( $\varepsilon_{12} = 0$ ) jusqu'à $\sigma_{11} = -300$ MPa suite au trajet de rochet 2D précédent . . . . .	106

3.13	Comparaison entre les surfaces seuil obtenues avec les modèles macroscopiques et celle obtenue avec le modèle polycristallin suite à un trajet de rochet 2D, ( $\sigma_{11} = 80$ MPa, $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$ ) et à une décharge en compression pure jusqu'à $\sigma_{11} = -300$ MPa . . . . .	107
3.14	Comparaison entre les réponses des modèles macroscopiques et celle du modèle polycristallin sur une simulation de rochet 2D, $\sigma_{11} = 80$ MPa, $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$ . . . . .	108
3.15	Évolution de la distorsion au cours du dernier cycle d'un trajet de rochet 2D, $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$ . . . . .	109
3.16	Évolution de la position du domaine de von Mises pour limiter le rochet 2D . . . . .	110
3.17	Exemple de surface seuil bidimensionnelle obtenue avec le premier cercle de construction complètement libre et le deuxième cercle bloqué en A . . . . .	113
3.18	Exemple de surface non-convexe avec la nouvelle simplification du modèle à distorsion . . . . .	114
3.19	Domaine d'évolution possible des variables de distorsion pour obtenir une surface seuil convexe . . . . .	115
3.20	Approximation elliptique du domaine d'évolution acceptable des variables de distorsion permettant de garantir la convexité de la surface seuil . . . . .	116
3.21	Domaine distordu obtenu avec $d_{(1)1} = R_{(1)}$ . . . . .	117
3.22	Limite des variables de distorsion imposées par les équations d'évolution pour que la surface seuil reste convexe . . . . .	118
3.23	Surface seuil obtenue pour une distorsion portée selon les axes $\hat{\omega}_2$ et $\hat{\omega}_3$ et de même amplitude . . . . .	118
3.24	Surface seuil obtenue pour une distorsion portée uniquement selon $\hat{\omega}_2$ et d'amplitude la norme de la précédente distorsion portée sur les axes $\hat{\omega}_2$ et $\hat{\omega}_3$ . . . . .	119
3.25	Surface seuil obtenue pour une distorsion $d_{(1)1} = R/2$ et $d_{(1)2} = d_{(1)3} = R/2$ . . . . .	121
3.26	Point de départ ( $M_0$ ) pour le processus de minimisation . . . . .	122
3.27	Utilisation d'une fonction puissance pour limiter la rotation du repère mobile pour de faibles valeurs de $\hat{S}_2$ . . . . .	123
3.28	Identification du modèle à distorsion sur une simulation de traction avec le modèle polycristallin . . . . .	124
3.29	Identification du modèle à distorsion sur des simulations cycliques uniaxiales avec le modèle polycristallin . . . . .	124
3.30	Comparaison entre la réponse du modèle à distorsion et celle d'un modèle de von Mises vis-à-vis d'une simulation de rochet biaxial faite avec le modèle polycristallin . . . . .	126
3.31	Simulation d'une décharge en compression ( $\sigma_{11} = 80 \rightarrow -300$ MPa ; $\varepsilon_{12} = 0$ ) . . . . .	126



3.32	Identification du modèle à distorsion sur des simulations de rochet biaxial faites avec le modèle polycristallin . . . . .	127
3.33	Validation du modèle à distorsion sur une simulation de rochet biaxial “papillon” faite avec le modèle polycristallin . . . . .	129
3.34	Identification du modèle à distorsion avec des résultats d’essais réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	133
3.35	Identification du modèle à distorsion avec des résultats d’essais de surécrouissage réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	136
3.36	Identification d’un modèle macroscopique basé sur le domaine d’élasticité de von Mises avec les résultats d’essai de surécrouissage réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	137
3.37	Validation du modèle à distorsion sur un essai papillon . . . . .	139
4.1	Illustration de la stratégie retenue pour rapprocher deux vecteurs dans un espace à trois dimensions . . . . .	144
4.2	Identification du modèle 5D sur l’essai de surécrouissage réalisé sur l’acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	155
4.3	Identification du modèle 5D sur les essais de rochet 2D réalisés sur l’acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	156
4.4	Validation de la version 5D du modèle à distorsion sur un essai papillon	156
4.5	Numérotation des axes de chargement . . . . .	157
4.6	Identification des deux modèles phénoménologiques sur un essai de traction monotone et sur des essais d’écrouissage cyclique réalisés sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	158
4.7	Identification des deux modèles phénoménologiques sur des essais de rochet uniaxial réalisés sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	159
4.8	Identification des deux modèles phénoménologiques sur des essais de rochet multiaxial réalisés sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	160
4.9	Identification des deux modèles phénoménologiques sur l’essai de surécrouissage n°1 réalisé sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	161
4.10	Identification des deux modèles phénoménologiques sur l’essai de surécrouissage n°2 réalisé sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	162
4.11	Essais de validation n°1 et 2 . . . . .	163
4.12	Essai de validation n°3 . . . . .	163
5.1	Machine d’essais triaxiale Astrée . . . . .	167
5.2	Schéma de fonctionnement de la régulation “Modal Effort”, d’après Calloch [Calloch 97]. . . . .	168
5.3	Photographies du montage d’essai . . . . .	169
5.4	Schéma du principe de l’essai de rochet de contact . . . . .	169
5.5	Trajet de chargement pour l’essai de rochet de contact . . . . .	170
5.6	Comparaison entre les déplacements horizontaux des deux massifs en acier inoxydable . . . . .	170

5.7	Rochet de contact pour un effort normal de 50 kN et un effort transverse cyclique entre -8,5 kN et -0,5 kN . . . . .	172
B.1	Illustration des deux choix de vecteur retenus pour la loi d'évolution de la rotation du repère mobile . . . . .	196
B.2	Explication de l'utilité de l'exposant $m_\phi$ lorsque l'on choisit le vecteur $\hat{\underline{S}}$ pour faire tourner le repère mobile . . . . .	198
B.3	Identification de la loi d'évolution $n^o$ 2 de la rotation du repère mobile sur un essai de surécrouissage réalisé sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L . . . . .	199
B.4	Identification de la loi d'évolution $n^o$ 2 de la rotation du repère mobile sur des essais de rochet biaxial réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L, $\sigma_{11} = 80$ MPa, $\epsilon_{12} = \pm 0,1 \%$ ; $\pm 0,2 \%$ ; $\pm 0,5 \%$ ; $\pm 0,75 \%$ . . . . .	200
B.5	Validation de la loi d'évolution $n^o$ 2 de la rotation du repère mobile sur un essai papillon réalisé sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L200	

# Liste des tableaux

1.1	Composition pondérale de l'acier inoxydable de type 316L utilisé pour l'étude des mécanismes physiques responsables de la déformation progressive, d'après [Bocher <i>et al.</i> 01] . . . . .	20
1.2	Coefficients du modèle polycristallin identifiés sur des essais réalisés sur un acier inoxydable de type 316SPH, d'après [Pilvin et Geyer 97] . . . . .	41
2.1	Capacité des différents modèles à distorsion à représenter certaines formes distordues de surfaces seuil et à représenter le comportement de matériaux métalliques sous chargement non-proportionnel . . . . .	86
3.1	Résumé des équations du modèle à distorsion, dans sa version simplifiée proposée par Kurtyka et Życzkowski . . . . .	98
3.2	Stratégie d'identification du modèle à distorsion . . . . .	99
3.3	Résumé des équations du modèle à distorsion "Distor2D" pour le cas de chargements biaxiaux . . . . .	125
3.4	Coefficients du modèle à distorsion identifiés avec le modèle polycristallin, d'après [Vincent <i>et al.</i> 02a] . . . . .	128
3.5	Composition pondérale du matériau COTHAA de type 316L d'après [Matheron et Vilhes 94] dans [Portier <i>et al.</i> 00] . . . . .	130
3.6	Résumé des équations du modèle à distorsion "Distor2D" pour le cas de chargements biaxiaux et prenant en compte le phénomène de surécrouissage . . . . .	132
3.7	Stratégie d'identification du modèle à distorsion "Distor2D" prenant en compte le phénomène de surécrouissage . . . . .	134
3.8	Coefficients du modèle à distorsion identifiés avec les essais réalisés sur l'acier inoxydable COTHAA de type 316L, d'après [Vincent <i>et al.</i> 02a] . . . . .	138
4.1	Résumé des équations de la version 5D du modèle à distorsion appelée "Distor5D" . . . . .	154
4.2	Coefficients de la nouvelle loi de rotation du repère mobile, pour la version 5D du modèle à distorsion . . . . .	154
4.3	Coefficients du modèle à distorsion identifiés sur les essais de dimension supérieure à 2 réalisés sur un acier inoxydable de type 316L . . . . .	157

4.4	Coefficients du modèle d’Ohno et Wang identifiés sur les essais de dimension supérieure à 2 réalisés sur un acier inoxydable de type 316L	158
B.1	Coefficients réidentifiés de la nouvelle loi de rotation du repère mobile, pour la version 5D du modèle à distorsion . . . . .	197

# Introduction

Si un matériau métallique est soumis à un chargement cyclique autour d'une contrainte moyenne non nulle, une accumulation de déformation plastique peut se produire, généralement dans la direction de la contrainte moyenne : on parle alors de *déformation progressive* ou bien encore du phénomène de *rochet*.

On rencontre ce comportement particulier des matériaux métalliques dans certaines applications industrielles, notamment celles du secteur nucléaire, en témoignent les nombreuses études qui ont porté sur ce sujet au cours des 25 dernières années. Bien que l'on n'ait jamais observé de problèmes dans les centrales nucléaires françaises, les critères de dimensionnement vis-à-vis de la déformation progressive sont violés pour un certain nombre de tuyauteries auxiliaires [Portier 99].

Un autre exemple [Ponter et Leckie 98a], [Ponter et Leckie 98b] concerne les composites à matrice métallique soumis à des chargements thermiques. Du fait de la différence de coefficients de dilatation thermique entre la matrice et les fibres (par exemple le couple aluminium-alumine), la matrice peut être plastifiée à chaque cycle thermique et par là-même engendrer de la déformation progressive.

Dans bon nombre de cas, l'endommagement du matériau devient critique avant que la déformation progressive ne devienne très importante. Il existe cependant des contre-exemples comme les problèmes de contact roue-rail des voies de chemin de fer. Dans ce cas précis, la forte pression hydrostatique présente sous la zone de contact permet de retarder l'apparition de fissures par fatigue, ce qui permet à la déformation progressive du rail de devenir très importante sous l'action d'un effort répété (par les nombreux passages de trains) et de direction parallèle au rail (notamment dans les virages).

Dans tous les cas, la qualité de la prédiction des cinétiques de rochet dépend de la capacité des lois de comportement utilisées à reproduire convenablement le comportement du matériau.

Le phénomène de rochet a fait l'objet de très nombreux travaux, tant du point de vue expérimental que théorique. En ce qui concerne l'aspect expérimental, on peut dire que tous les facteurs pouvant jouer sur la réponse du matériau ont désormais été testés. Une large base d'essais est donc disponible dans la littérature.

En ce qui concerne la modélisation du phénomène de déformation progressive, deux approches ont été suivies. La première est l'approche phénoménologique, qui cherche à décrire le comportement du matériau uniquement à l'échelle macroscopique. Elle s'appuie sur un domaine d'élasticité, généralement défini par le critère de von Mises, sur une loi d'écoulement plastique normal au domaine d'élasticité et sur un jeu de variables internes dotées chacune de leur loi d'évolution. La seconde approche se place dans un cadre micromécanique appliqué au comportement cyclique des métaux polycristallins [Cailletaud 87]. Dans ce cas, les lois d'évolution sont définies à une échelle microscopique, ce qui permet de prendre en compte des aspects plus physiques du comportement. L'état de contrainte microscopique est obtenu par une étape de localisation de l'état de contrainte macroscopique, et les déformations macroscopiques s'obtiennent, après avoir intégré les lois d'évolution microscopiques, par une homogénéisation des déformations plastiques microscopiques.

On peut synthétiser les avantages et les inconvénients de ces deux approches par les

remarques suivantes. Tout d’abord, les modèles macroscopiques sont généralement faciles à utiliser et permettent des calculs rapides mais, en contrepartie, ils sont souvent limités d’un point de vue prédictif aux seuls chargements utilisés pour les identifier. À l’inverse, l’approche micromécanique est bien plus prédictive, mais un grand nombre de variables internes est introduit (jusqu’à cent fois celui d’un modèle macroscopique), ce qui explique pourquoi les modèles micromécaniques restent difficiles à utiliser dans les calculs de structure. Ces deux approches sont en fait complémentaires. Nous verrons qu’il est en effet possible d’utiliser les résultats obtenus avec un modèle polycristallin pour construire “correctement” un modèle macroscopique, par exemple en complétant une base d’essais insuffisante [Erieau *et al.* 00].

L’objectif de cette thèse est d’améliorer la capacité d’un modèle phénoménologique à décrire le rochet multiaxial. Jusqu’à présent, la plupart des modèles macroscopiques conçus pour décrire le rochet se sont appuyés sur des lois d’écrouissage cinématique et ils ont bien réussi à représenter le rochet uniaxial. En revanche, lorsque l’on souhaite représenter les résultats expérimentaux obtenus sous sollicitations à la fois uniaxiales et multiaxiales, le phénomène est encore mal décrit.

Ce travail s’inscrit dans la continuité de la thèse effectuée par Laurence Portier [Portier 99] au LMT Cachan, thèse dans laquelle plusieurs modèles macroscopiques phénoménologiques issus de la littérature ont été testés sur des essais multiaxiaux complexes provoquant du rochet. Aucun de ces modèles ne s’avère être capable de représenter l’ensemble de la base d’essais.

Parmi les possibles voies d’amélioration des modèles suggérées dans la littérature, la plus répandue consiste à prendre en compte la distorsion du domaine d’élasticité afin de mieux prévoir la direction de l’écoulement plastique au cours de trajets multiaxiaux. En effet, la plupart des modèles sont basés sur un écoulement plastique normal au domaine d’élasticité et l’on choisit par simplicité de ne décrire que la translation et le gonflement de ce domaine. Or la distorsion du domaine d’élasticité est un phénomène connu qui a lui aussi fait l’objet de nombreux travaux expérimentaux et théoriques. Par conséquent, si l’on parvient à modéliser de manière adéquate la distorsion du domaine d’élasticité, alors on sera en mesure de décrire correctement la direction de l’écoulement plastique, et donc d’améliorer la description du rochet multiaxial.

Dans le présent travail, nous avons donc introduit la distorsion du domaine d’élasticité dans des modèles par ailleurs capables de prédire convenablement le phénomène de rochet uniaxial. Notre but était de montrer l’effet de cette prise en compte sur les résultats de rochet multiaxial.

Pour ce faire, nous avons utilisé une stratégie *ad hoc*. Il s’agissait d’utiliser un modèle polycristallin, qui décrit correctement les résultats expérimentaux de rochet multiaxial mais également les distorsions du domaine d’élasticité, pour développer un modèle macroscopique prenant en compte la distorsion du domaine d’élasticité. Le modèle micro-macro a donc été utilisé comme une “machine d’essais virtuels” pour construire la base de résultats nécessaires à la construction, à l’identification et à la validation des lois de comportement du modèle macroscopique. Une fois cette étape franchie, le mo-

dèle macroscopique pouvait, avec plus de chances de succès, être identifié et validé sur des résultats d'essais obtenus sur un matériau réel. Enfin, il reste à valider le modèle macroscopique sur un essai de structure, en l'occurrence un essai de rochet de contact.

Ce mémoire s'articule en 5 chapitres. Le premier chapitre est une étude bibliographique portant sur le phénomène de déformation progressive. Nous rapportons la plupart des observations phénoménologiques rencontrées dans la littérature avant de présenter des travaux récents sur l'observation des phénomènes physiques microscopiques (à l'échelle des dislocations) responsables de la déformation progressive. Enfin, nous terminons le chapitre par la présentation de quelques modèles macroscopiques et d'un modèle micromécanique capables de représenter, au moins qualitativement, le phénomène de rochet. Au cours de cette dernière partie, nous expliquons quels développements successifs ont été proposés pour améliorer les prévisions des modèles macroscopiques.

Le second chapitre est une autre étude bibliographique, mais qui porte cette fois-ci sur le phénomène de distorsion du domaine d'élasticité. Nous rapportons quelques résultats expérimentaux qui mettent en évidence ce phénomène, et nous présentons également plusieurs modèles. A la fin du chapitre, nous recensons les avantages et les inconvénients des différents modèles présentés, ce qui nous permet de choisir celui qui est *a priori* le mieux adapté à notre problématique.

Dans le troisième chapitre, nous utilisons le modèle micro-macro présenté dans le premier chapitre pour construire une base d'essais virtuels contenant à la fois des essais de rochet multiaxiaux mais aussi des détections de surface seuil. Cette étape importante dans la construction du modèle macroscopique nous permet de simplifier judicieusement le modèle à distorsion retenu. En parallèle, nous implantons dans le modèle à distorsion des lois d'évolution compatibles avec la description du phénomène de rochet uniaxial, et nous proposons une nouvelle loi pour gérer la rotation apparente des surfaces seuil. Nous identifions ensuite ces lois sur les résultats numériques obtenus avec le modèle micro-macro présenté dans le premier chapitre et nous montrons que ce dernier est alors capable de "suivre" le modèle micro-macro, tant du point de vue de la forme des surfaces seuil que des cinétiques de rochet. Nous proposons alors une nouvelle identification sur les résultats d'essais obtenus sur un acier inoxydable de type 316L. Là encore, le modèle reste performant.

Le quatrième chapitre traite de l'extension du modèle à distorsion au cas de chargements de dimension supérieure à deux, comme ceux rencontrés (par exemple) dans des essais réalisés sur une éprouvette tubulaire en pression interne / traction-compression / torsion (Cf. [Delobelle *et al.* 95] par exemple). En effet, nous verrons que le modèle à distorsion s'appuie sur une construction géométrique liée à un repère tournant et que c'est la gestion de la rotation de ce repère qui nécessite des développements particuliers. La nouvelle version du modèle est identifiée sur les mêmes essais que dans le chapitre précédent, mais également sur des essais complexes de rochet triaxial.

Enfin, le dernier chapitre décrit le principe et les premiers résultats d'un essai de structure de type rochet de contact réalisé au laboratoire. Nous essayons dans cet essai de



provoquer une déformation progressive dans des conditions proches de celles d'un contact roue-rail. L'objectif ultime est de valider le modèle développé ici dans ce cas particulier de chargement, où les champs de contrainte et de déformation sont hétérogènes.



# Chapitre 1

## Phénomène de rochet : résultats expérimentaux, mécanismes physiques et modélisation phénoménologique

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Description du phénomène de rochet . . . . .</b>	<b>9</b>
1.1.1	Influence de l'écrouissage cyclique du matériau . . . . .	10
1.1.2	Influence de la viscosité et de la température . . . . .	10
1.1.3	Influence du trajet de chargement mécanique . . . . .	12
1.1.3.1	Rochet uniaxial . . . . .	12
1.1.3.1.1	Effets de la contrainte moyenne et de l'amplitude de contrainte . . . . .	12
1.1.3.1.2	Effet d'histoire . . . . .	12
1.1.3.2	Rochet multiaxial . . . . .	15
1.1.3.2.1	Effet de la contrainte moyenne . . . . .	15
1.1.3.2.2	Effet de l'amplitude du chargement secondaire . . . . .	15
1.1.3.2.3	Effet d'histoire . . . . .	16
1.1.3.2.4	Influence de la forme du trajet de chargement . . . . .	16
1.1.4	Conclusion . . . . .	17
<b>1.2</b>	<b>Observations microscopiques . . . . .</b>	<b>20</b>
1.2.1	Présentation du matériau . . . . .	20
1.2.2	Chargements uniaxiaux . . . . .	21
1.2.2.1	Étude des structures de dislocations lors d'un trajet de traction monotone . . . . .	21
1.2.2.2	Stabilité des structures de dislocations lors d'un chargement en retour. . . . .	23

---

1.2.2.3	Mécanismes de déformation plastique développés sous sollicitation cyclique à déformation plastique imposée . . . . .	24
1.2.2.4	Comportement cyclique sous contraintes imposées . . . . .	24
1.2.3	Chargements multiaxiaux non-proportionnels . . . . .	26
1.2.3.1	Surécrouissage et structures de dislocations . . . . .	26
1.2.3.2	Rochet multiaxial et structures de dislocations . . . . .	27
1.2.4	Conclusion sur les mécanismes physiques liés à la déformation progressive . . . . .	28
<b>1.3</b>	<b>Modèles phénoménologiques . . . . .</b>	<b>29</b>
1.3.1	Modèles macroscopiques . . . . .	29
1.3.1.1	Écrouissage cinématique linéaire de Prager [Prager 58] . . . . .	31
1.3.1.2	Écrouissage cinématique non-linéaire d'Armstrong-Frederick [Armstrong et Frederick 66] . . . . .	32
1.3.1.3	Combinaison de plusieurs écrouissages cinématiques . . . . .	33
1.3.1.4	Introduction de contraintes seuil . . . . .	34
1.3.1.5	Modèle d'Ohno et Wang . . . . .	35
1.3.1.6	Modélisation du rochet multiaxial . . . . .	35
1.3.1.7	Bilan des modèles macroscopiques . . . . .	36
1.3.2	Modèles micro-macro . . . . .	37
1.3.2.1	Présentation du modèle polycristallin . . . . .	38
1.3.2.2	Illustration des capacités du modèle polycristallin . . . . .	41
1.3.2.3	Bilan sur les capacités du modèle polycristallin et mise en place d'une procédure de détection de surfaces seuil numériques . . . . .	43

---

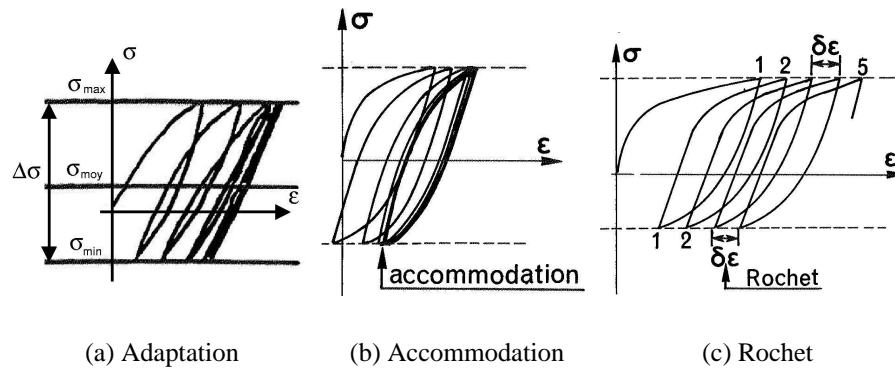


FIG. 1.1 – Les trois types de comportement sous sollicitation cyclique autour d'une contrainte moyenne non nulle

## 1.1 Description du phénomène de rochet

Dans cette partie, nous ne nous intéressons qu'à la description des principaux résultats expérimentaux relatifs au phénomène de rochet. Les autres aspects du comportement comme l'écrouissage cyclique ou le surécrouissage par exemple, sont largement illustrés dans la littérature et une synthèse de ces phénomènes peut être trouvée dans [Calloch 97].

D'autre part, nous ne présentons que quelques résultats d'essais sur le phénomène de rochet. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux nombreux travaux issus de la littérature et notamment aux références suivantes : [Ruggles et Krempf 89], [Delobelle 89], [Hassan et Kyriakides 92], [Hassan *et al.* 92], [Delobelle et Robinet 93], [Hassan et Kyriakides 94a], [Hassan et Kyriakides 94b], [Jiang et Sehitoglu 94], [Delobelle *et al.* 95], [Mcdowell 95], [Haupt et Schink 96], [Corona *et al.* 96], [Portier *et al.* 00] et [Bocher *et al.* 01].

Lorsque l'on réalise des essais cycliques sur un matériau métallique autour d'une contrainte moyenne non nulle, on peut obtenir trois phénomènes selon les conditions de chargement :

- une stabilisation de la déformation avec un comportement élastique au cycle stabilisé ; c'est le phénomène d'*adaptation*,
- une stabilisation de la déformation avec un comportement élasto-plastique au cycle stabilisé ; c'est l'*accommodation*,
- un accroissement de la déformation à chaque cycle et qui ne disparaît pas avec le nombre de cycles ; c'est le phénomène de *rochet* ou *déformation progressive*.

Ces trois phénomènes sont représentés sur la figure 1.1 dans le cas de sollicitations uniaxiales.

La déformation progressive résulte de la superposition d'une contrainte moyenne au cours du cycle  $\sigma_{moy}$  non nulle (ou chargement primaire) et d'un chargement cyclique

(ou chargement secondaire) qui peut être uniaxial ou multiaxial. On parle de rochet uniaxial (ou rochet 1D) lorsque le chargement cyclique est imposé dans la même direction que la contrainte moyenne non nulle. Les essais de rochet multiaxiaux sont en revanche des essais pour lesquels la direction du chargement primaire est différente de la direction du chargement secondaire. Un exemple d'essai de rochet biaxial (ou rochet 2D) très courant est un essai de traction - torsion sur éprouvette tubulaire où l'on impose :  $\sigma_{ZZ} = Cte$  et  $\epsilon_{\theta Z} = \pm \epsilon_{\theta Zmax}$ . On peut alors obtenir de la déformation progressive dans la direction axiale et un durcissement ou un adoucissement cyclique sur la voie de torsion.

Nous rapportons ici quelques résultats expérimentaux issus de la littérature mettant en évidence la déformation progressive du matériau ou phénomène de rochet.

### 1.1.1 Influence de l'écrouissage cyclique du matériau

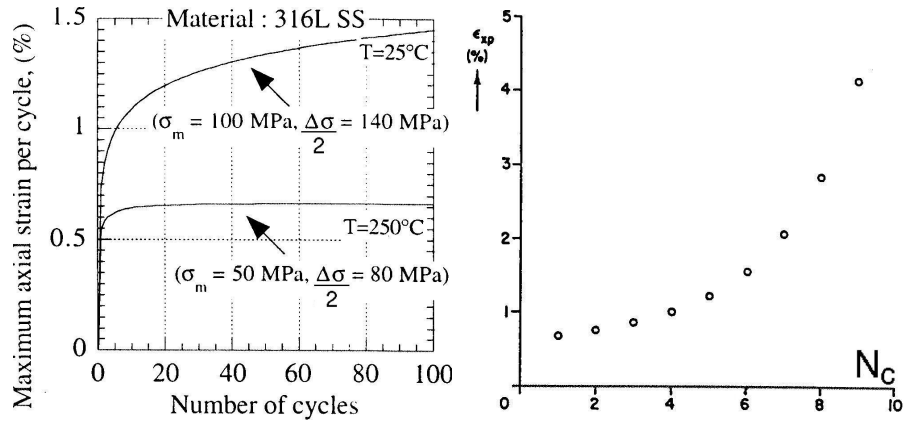
Pour un matériau présentant un durcissement cyclique (comme l'acier inoxydable de type 316L), on peut distinguer deux phases successives de rochet : tout d'abord, une période dite de rochet "transitoire" où le pas de rochet, c'est-à-dire l'incrément de déformation par cycle, est assez fort, puis une seconde phase dite de "rochet asymptotique" où le pas de rochet se stabilise à une valeur plus faible que celle de départ (Fig. 1.2(a)) [Portier *et al.* 00]. En revanche, pour un matériau présentant un adoucissement cyclique, le pas de rochet évolue de façon exponentielle (Fig. 1.2(b)). L'écrouissage cyclique du matériau a donc une influence évidente sur le comportement en rochet [Jiang et Sehitoglu 94].

### 1.1.2 Influence de la viscosité et de la température

Si le matériau n'est pas visqueux, la fréquence du chargement n'a pas d'influence sur la vitesse de déformation progressive. Dans le cas contraire, plus la vitesse de déformation est faible, plus le phénomène de fluage sera important au cours des cycles<sup>1</sup>, ce qui augmente la déformation progressive par cycle. De même, l'augmentation de la température provoque généralement une augmentation de la vitesse de rochet à chargement mécanique constant<sup>2</sup> (voir Fig. 1.3) [Delobelle *et al.* 95].

1. La durée par cycle pendant laquelle le matériau est soumis à la contrainte maximum augmente.

2. L'acier inoxydable de type 316L est un cas particulier puisqu'il présente une viscosité importante à température ambiante mais qui disparaît ensuite aux alentours de 320 °C pour revenir à des températures supérieures à 400 °C. Par conséquent, l'effet "accélérateur" de la température sur la vitesse de rochet est atténué aux alentours de 320 °C et la vitesse de rochet peut dans ce cas être plus faible qu'à température ambiante.



(a) Evolution de la déformation progressive pour un matériau à durcissement cyclique (acier inoxydable 316L), d'après [Portier *et al.* 00]

(b) Evolution de la déformation progressive pour un matériau à adoucissement cyclique (acier 1020),  $\sigma_{moy} = 140 \text{ MPa}$ ,  $\Delta\sigma/2 = 400 \text{ MPa}$ , d'après [Hassan et Kyriakides 92]

FIG. 1.2 – Influence de l'écrouissage cyclique du matériau sur le pas de rochet uniaxial

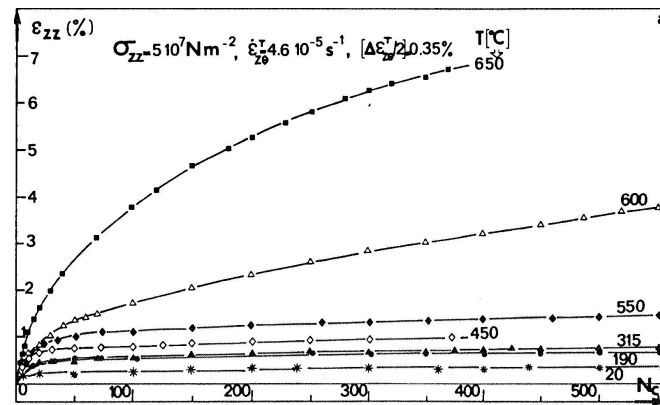


FIG. 1.3 – Influence de la température sur la vitesse de rochet en traction / torsion d'un acier inoxydable 17-12 Mo-SPH, d'après [Delobelle 89]

### 1.1.3 Influence du trajet de chargement mécanique

#### 1.1.3.1 Rochet uniaxial

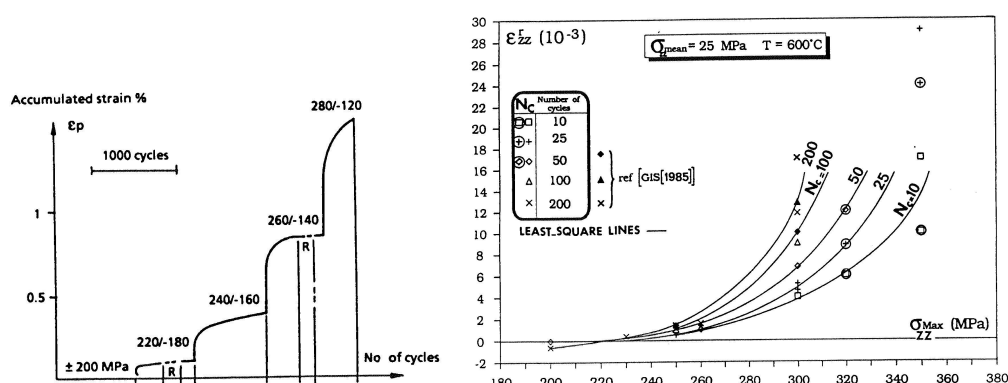
**1.1.3.1.1 Effets de la contrainte moyenne et de l'amplitude de contrainte** Pour une amplitude de contrainte fixée, le pas de rochet est une fonction croissante de la contrainte moyenne (Fig. 1.4(a)) et, à contrainte moyenne fixée, le pas de rochet est aussi une fonction croissante de l'amplitude de contrainte (Fig. 1.4(b)). Enfin, pour une contrainte maximum donnée, on montre [Delobelle *et al.* 95] qu'il existe une contrainte moyenne optimale (ou une amplitude de contrainte optimale) qui provoque le maximum de rochet (Fig. 1.4(c)).

**1.1.3.1.2 Effet d'histoire** Considérons deux trajets  $(\sigma_{moy}^0; \Delta\sigma^0)$  et  $(\sigma_{moy}^1; \Delta\sigma^1)$  provoquant respectivement des pas de rochet stabilisé  $\dot{\epsilon}_{sta}^{r0}$  et  $\dot{\epsilon}_{sta}^{r1}$  tels que  $\dot{\epsilon}_{sta}^{r0} < \dot{\epsilon}_{sta}^{r1}$  sur un matériau à durcissement cyclique. Si l'on sollicite successivement le matériau sous  $(\sigma_{moy}^0; \Delta\sigma^0)$  puis sous  $(\sigma_{moy}^1; \Delta\sigma^1)$ , cela n'a généralement pas d'incidence sur les pas de rochet  $\dot{\epsilon}_{sta}^{r0}$  et  $\dot{\epsilon}_{sta}^{r1}$ . En revanche, si l'on commence par solliciter le matériau sous le chargement  $(\sigma_{moy}^1; \Delta\sigma^1)$ , alors le pas de rochet obtenu lors du chargement  $(\sigma_{moy}^0; \Delta\sigma^0)$  suivant est très affecté par le premier chargement. On peut ainsi observer un arrêt du rochet lorsque l'amplitude de sollicitation diminue (Fig. 1.5(b)) et même une inversion du sens de la déformation progressive par rapport à la contrainte moyenne lorsque l'on diminue la valeur absolue de cette dernière (Fig. 1.5(d))<sup>3</sup>. On parle alors d'*effet mémoire* [Jiang et Sehitoglu 94].

Dans le premier cas, la diminution de l'amplitude de sollicitation conduit à réaliser des petits cycles à l'intérieur des grands cycles réalisés dans l'étape précédente, ce qui diminue considérablement l'activité plastique par rapport au cas où l'on cycle directement avec les petits cycles. En effet, le matériau s'est fortement écroui sous les premiers niveaux de chargement et cet écrouissage ne s'estompe pas complètement lors d'une diminution de l'amplitude de sollicitation. On retrouve en quelque sorte l'effet mémoire habituellement rencontré sous chargements cycliques pilotés en déformation [Chaboche *et al.* 79]. Dans le cas de la déformation progressive, cet effet mémoire est sans doute encore plus important puisque Delobelle *et al.* montrent qu'un faible pré-écrouissage (monotone ou cyclique) à une contrainte supérieure à celle du cyclage ultérieur suffit pour diminuer considérablement la vitesse de rochet [Delobelle *et al.* 95]. Dans le second cas, l'inversion du sens de la déformation progressive provoquée par la diminution de la contrainte moyenne peut s'expliquer en considérant que les boucles d'hystérésis  $(\sigma - \epsilon)$  deviennent symétriques (modules d'écrouissage quasiment identiques en traction et en compression) par rapport à la contrainte moyenne au bout d'un certain nombre de cycles, comme si le matériau "s'adaptait" au chargement décalé en contrainte. Toute modification de la contrainte moyenne provoque alors un nouveau déséquilibre entre les modules d'écrouissage et donc une accumulation de déformation dans le sens de l'incrément de contrainte moyenne.

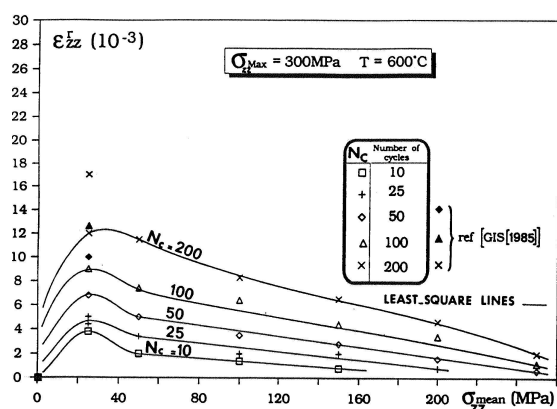
3. La déformation progressive est normalement orientée dans le sens de la contrainte moyenne.





(a) Effet de  $\sigma_{moy}$  pour  $\Delta\sigma = Cte$ , d'après [Goodman 83]

(b) Effet de  $\Delta\sigma$  pour  $\sigma_{moy}$  fixée, d'après [Delobelle *et al.* 95]



(c) Effet de  $\sigma_{moy}$  pour  $\sigma_{max}$  fixée, d'après [Delobelle *et al.* 95]

FIG. 1.4 – Influence des paramètres de chargement mécaniques sur le rochet uniaxial d'un acier inoxydable de type 316L

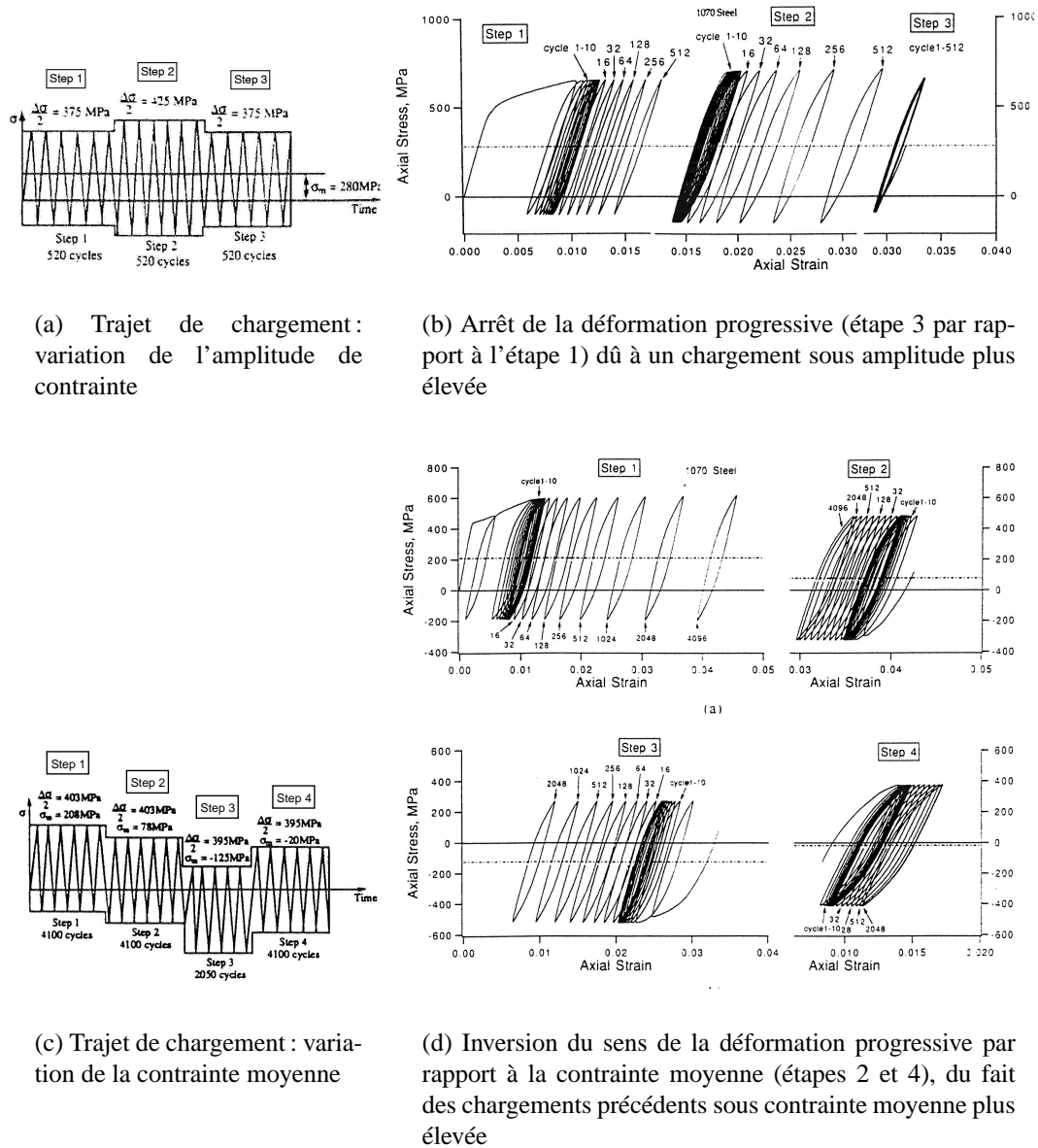


FIG. 1.5 – Influence de l'histoire de chargement sur le rochet uniaxial d'un acier 1070, d'après [Jiang et Sehitoglu 94]

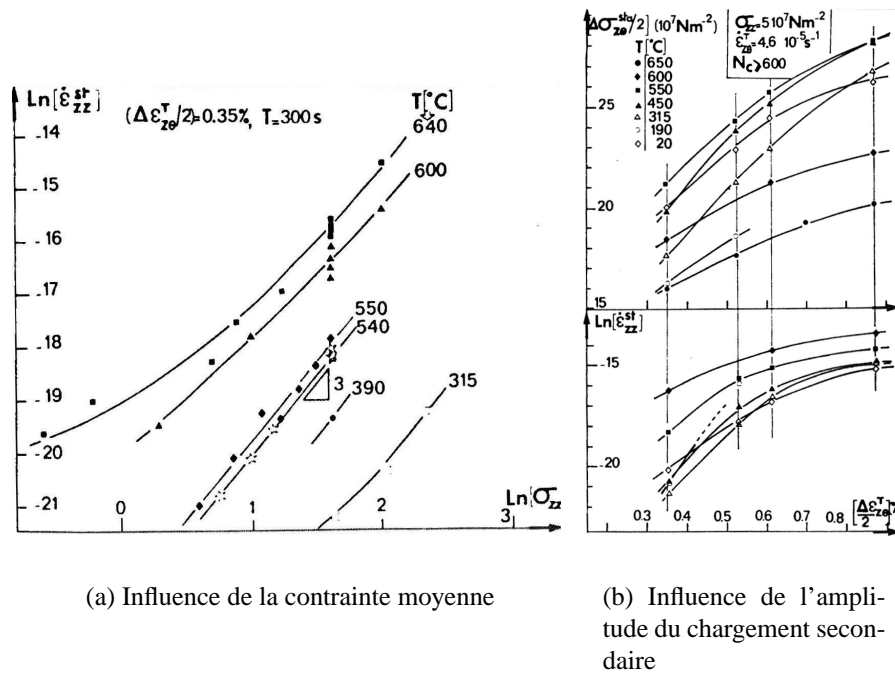


FIG. 1.6 – Influence des paramètres de chargement mécaniques sur le rochet biaxial d'un acier inoxydable de type 316L, d'après [Delobelle 89]

### 1.1.3.2 Rochet multiaxial

Du fait de la présence d'une contrainte moyenne dans une direction, un chargement cyclique, quelle que soit sa direction, peut provoquer une déformation progressive dans la direction de la contrainte moyenne. La plupart des essais de rochet multiaxial sont des essais de rochet biaxial effectués sur des éprouvettes tubulaires en traction constante/torsion cyclique ou en pression interne constante/traction-compression cyclique.

**1.1.3.2.1 Effet de la contrainte moyenne** Comme dans le cas du rochet uniaxial, la vitesse de rochet multiaxial augmente avec la valeur de la contrainte moyenne. Delobelle [Delobelle 89] obtient même dans le cas de chargements de traction/torsion une loi puissance entre la vitesse de rochet stabilisé et la contrainte axiale moyenne :  $\dot{\varepsilon}_{ZZsta}^r \propto \sigma_{ZZ}^n$  avec  $n = 2,3$  à  $3$  pour  $10 < \sigma_{ZZ} < 100$  MPa (Fig. 1.6(a)).

**1.1.3.2.2 Effet de l'amplitude du chargement secondaire** Pour un même chargement primaire, la vitesse de déformation progressive est d'autant plus importante que l'amplitude du chargement secondaire est élevée (Fig. 1.6(b)).

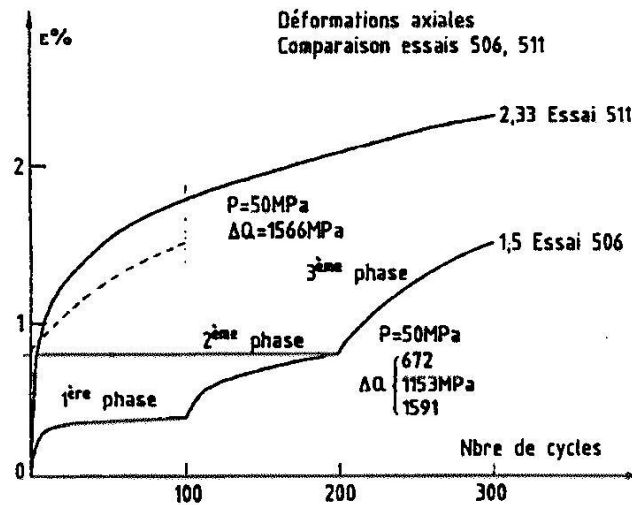
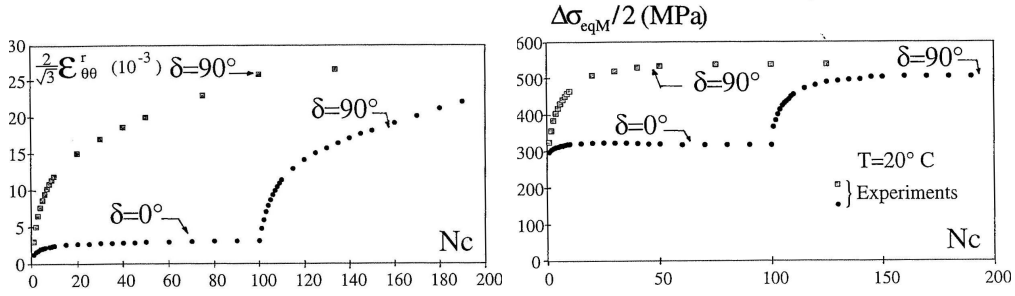


FIG. 1.7 – Comparaison des réponses d'un acier inoxydable de type 316L à des essais de rochet 2D par palier unique ou par paliers successifs, d'après [Clément et al. 84] dans [Portier 99]

**1.1.3.2.3 Effet d'histoire** Comme dans le cas du rochet uniaxial, effectuer successivement plusieurs essais de rochet 2D n'affecte pas la réponse du matériau à condition d'enchaîner les essais en partant de celui qui fournit le moins de déformation progressive pour finir par celui qui en fournit le plus [Portier 99] (Fig. 1.7). En revanche, un effet mémoire existe si l'on commence les séquences d'essais par l'essai provoquant le plus de rochet. Dans un essai de rochet 2D en traction constante/torsion cyclique, Delobelle remarque qu'une diminution de la contrainte axiale moyenne au bout d'un grand nombre de cycles ( $N = 600$ ) provoque une inversion du sens de la déformation progressive par rapport à la contrainte moyenne, inversion d'autant plus importante que la diminution de la contrainte moyenne est importante [Delobelle 89]. En revanche, une diminution de l'amplitude de déformation cyclique ne donne pas une vitesse de rochet plus faible que celle obtenue directement sous l'amplitude de cisaillement la plus faible, du moins en régime stabilisé. Delobelle observe en effet que tout effet mémoire disparaît à condition de solliciter suffisamment longtemps le matériau sous le niveau le plus faible ( $N > 600$ ) [Delobelle 89].

**1.1.3.2.4 Influence de la forme du trajet de chargement** Une fois la contrainte moyenne imposée au matériau, plusieurs trajets cycliques équivalents au sens de von Mises peuvent être appliqués pour provoquer une déformation progressive. Comme dans l'étude du phénomène de surécrouissage [Calloch 97], une classification des trajets peut être faite du point de vue de la déformation progressive. Ainsi, Delobelle *et al.* [Delobelle *et al.* 95] montrent, grâce à des essais de rochet 3D sous pression interne constante et variation cyclique des déformations axiales  $\epsilon_{ZZ}$  et de torsion  $\gamma_{Z\theta}$ , que la vitesse de rochet est une fonction croissante de la non-proportionnalité du chargement



(a) Influence de la non proportionnalité du chargement secondaire sur la déformation progressive

(b) Influence de la non proportionnalité du chargement secondaire sur la contrainte équivalente de von Mises : phénomène de surécrouissage

FIG. 1.8 – Influence de la non-proportionnalité du chargement secondaire sur la réponse d'un acier inoxydable 316L, d'après [Bocher et al. 01], avec  $\sigma_{\theta\theta} = 50$  MPa,  $\epsilon_{ZZ} = \epsilon_{ZZmax} \cos(\omega t)$  et  $\epsilon_{\theta Z} = 2/\sqrt{3}\epsilon_{ZZmax} \cos(\omega t - \delta)$

secondaire. Ils obtiennent la vitesse de rochet la plus importante pour un chargement secondaire circulaire dans le plan  $(\epsilon_{ZZ}, \gamma_{Z\theta}/\sqrt{3})^4$ .

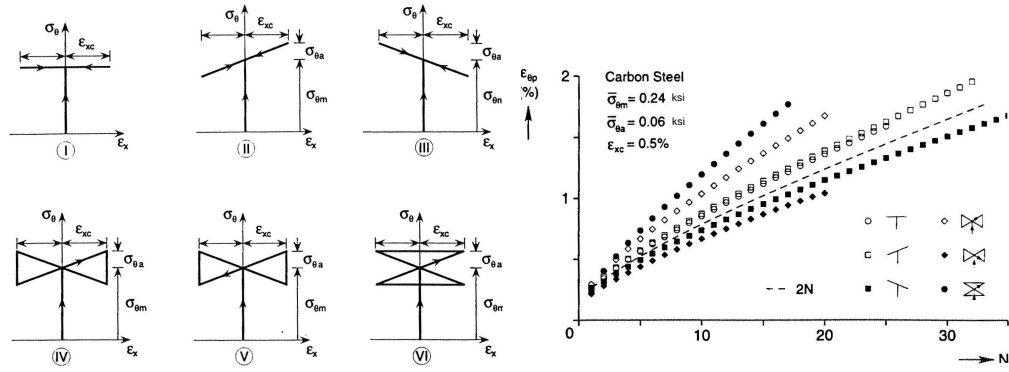
D'autre part, Corona *et al.* [Corona et al. 96] ont montré qu'une variation même légère de la contrainte primaire à l'intérieur du cycle produit des modifications non négligeables du niveau de déformation progressive.

Enfin, Jiang et Sehitoglu [Jiang et Sehitoglu 94] montrent que la déformation progressive n'est pas nécessairement orientée dans la direction de la contrainte moyenne. Ils obtiennent ce résultat avec un trajet de chargement représentatif du phénomène de rochet de contact, phénomène dont nous parlerons dans le dernier chapitre (Fig. 1.10).

### 1.1.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons présenté les principaux facteurs pouvant jouer sur la réponse d'un matériau lors d'essais de déformation progressive, à savoir l'écrouissage cyclique du matériau, la température, la vitesse de chargement si le matériau est visqueux, le niveau de chargement et le trajet suivi. Il est difficile de prendre tous ces facteurs en compte simultanément. C'est la raison pour laquelle nous ne nous intéressons plus dans la suite à l'effet de la température ; les modèles de comportement seront donc volontairement simplifiés au cas de chargements isothermes, et tous les essais

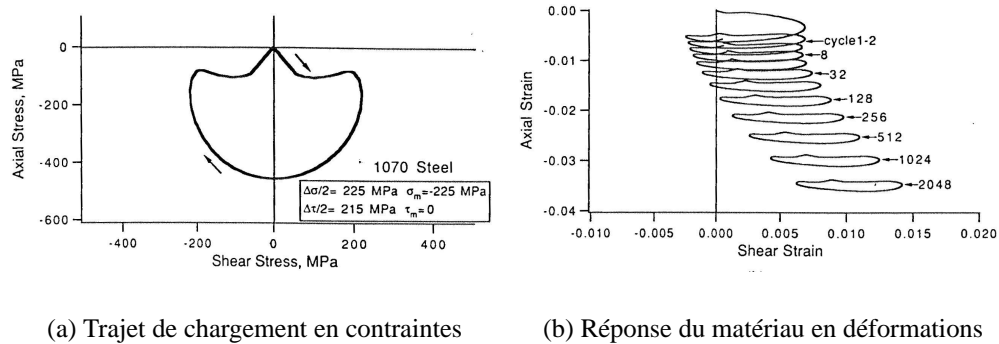
4. La vitesse de rochet s'entend comme un incrément de déformation par cycle. Or c'est aussi au cours des trajets circulaires que la quantité de déformation plastique par cycle est la plus importante (l'écoulement plastique est continu pendant le cycle). On peut donc supposer que l'influence du trajet de chargement serait sans doute moins importante si l'on rapportait la déformation de rochet à la déformation plastique produite au cours d'un cycle.



(a) Définition de trajets de chargement ayant la même contrainte primaire et la même amplitude de chargement secondaire

(b) Déformation progressive circonférentielle

FIG. 1.9 – Influence d'une variation de contrainte primaire au cours du cycle sur le rochet biaxial d'un acier 1020, d'après [Corona et al. 96]



(a) Trajet de chargement en contraintes

(b) Réponse du matériau en déformations

FIG. 1.10 – Déformation progressive d'un acier 1070 dans une direction différente de la contrainte moyenne du chargement, d'après [Jiang et Sehitoglu 94].

utilisés pour leur identification auront été réalisés à température ambiante.

Après avoir présenté les aspects phénoménologiques observés au cours d'essais de déformation progressive, nous allons maintenant nous attacher à présenter d'une part les mécanismes physiques liés à la déformation progressive et d'autre part les principaux modèles construits pour représenter le phénomène de déformation progressive.

C	Mn	S	P	Si	Cr	Ni	Mo	Co
≤ 0,03	1,084	≤ 0,001	≤ 0,021	0,44	17,54	12,3	2,47	0,15
	N	B	Cu	Ti	Nb	Al	Fe	
	0,075	0,001	0,175	≤ 0,005	0,015	0,1	reste	

TAB. 1.1 – Composition pondérale de l’acier inoxydable de type 316L utilisé pour l’étude des mécanismes physiques responsables de la déformation progressive, d’après [Bocher *et al.* 01]

## 1.2 Observations microscopiques des phénomènes physiques responsables de l’effet rochet : Application à l’acier inoxydable de type 316L

De nombreuses études ont été réalisées, à l’échelle des dislocations, pour comprendre le phénomène d’écrouissage des matériaux métalliques sous sollicitations monotones et cycliques, uniaxiales et multiaxiales non-proportionnelles [Clavel *et al.* 89], [Doong *et al.* 90], [Doquet et Pineau 90], [Doquet 93], [Clavel et Feaugas 94], [Feaugas 99]. Cependant, à ma connaissance, peu de travaux existent sur l’étude des mécanismes physiques rencontrés lors d’essais de rochet [Gaudin et Feaugas 99], [Gaudin et Feaugas 00], [Bocher *et al.* 01]. Nous reportons ici quelques informations à ce sujet, qui sont presque toutes issues des travaux de Christophe Gaudin (thèse soutenue en Septembre 2002 sur ce sujet [Gaudin 02]) et de Xavier Feaugas, de l’Université Technologique de Compiègne, vers qui je renvoie le lecteur pour plus d’information. Nous commençons par présenter le matériau utilisé dans leur étude avant d’effectuer un rapide état des lieux concernant d’une part les trajets uniaxiaux et d’autre part l’influence d’un trajet non-proportionnel.

### 1.2.1 Présentation du matériau

Le matériau étudié par Gaudin et Feaugas [Gaudin 02] est un acier inoxydable de type 316L dont la composition pondérale est reportée dans le tableau 1.1. Cet acier inoxydable est un acier austénitique car il conserve à température ambiante la structure cubique face centrée  $\gamma$  bien qu’elle y soit thermodynamiquement instable. La relative stabilité de cette allotropie du fer est permise grâce à une hypertrempe à l’eau et à la teneur en nickel, élément dit gammagène ou stabilisateur de la phase  $\gamma$ . Cette dernière consiste en une mise en solution durant environ 90 minutes sous une température de [1000 °C - 1150 °C] permettant ainsi la formation de l’austénite  $\gamma$ , suivie d’un refroidissement rapide à l’eau. La résistance à la corrosion est principalement due à la forte teneur en chrome (> 13%) mais des additions de molybdène de quelques pour cent ont pour effet d’améliorer très nettement cette tenue à la corrosion, en particulier en milieu sulfurique ou chloré (eau de mer) ou en présence d’acides organiques (industrie agro-alimentaire). Enfin, la faible teneur en carbone (L comme “Low” dans 316L) liée



à des additions contrôlées en azote confèrent à cet acier des propriétés intéressantes de résistance à la corrosion intergranulaire.

## 1.2.2 Chargements uniaxiaux

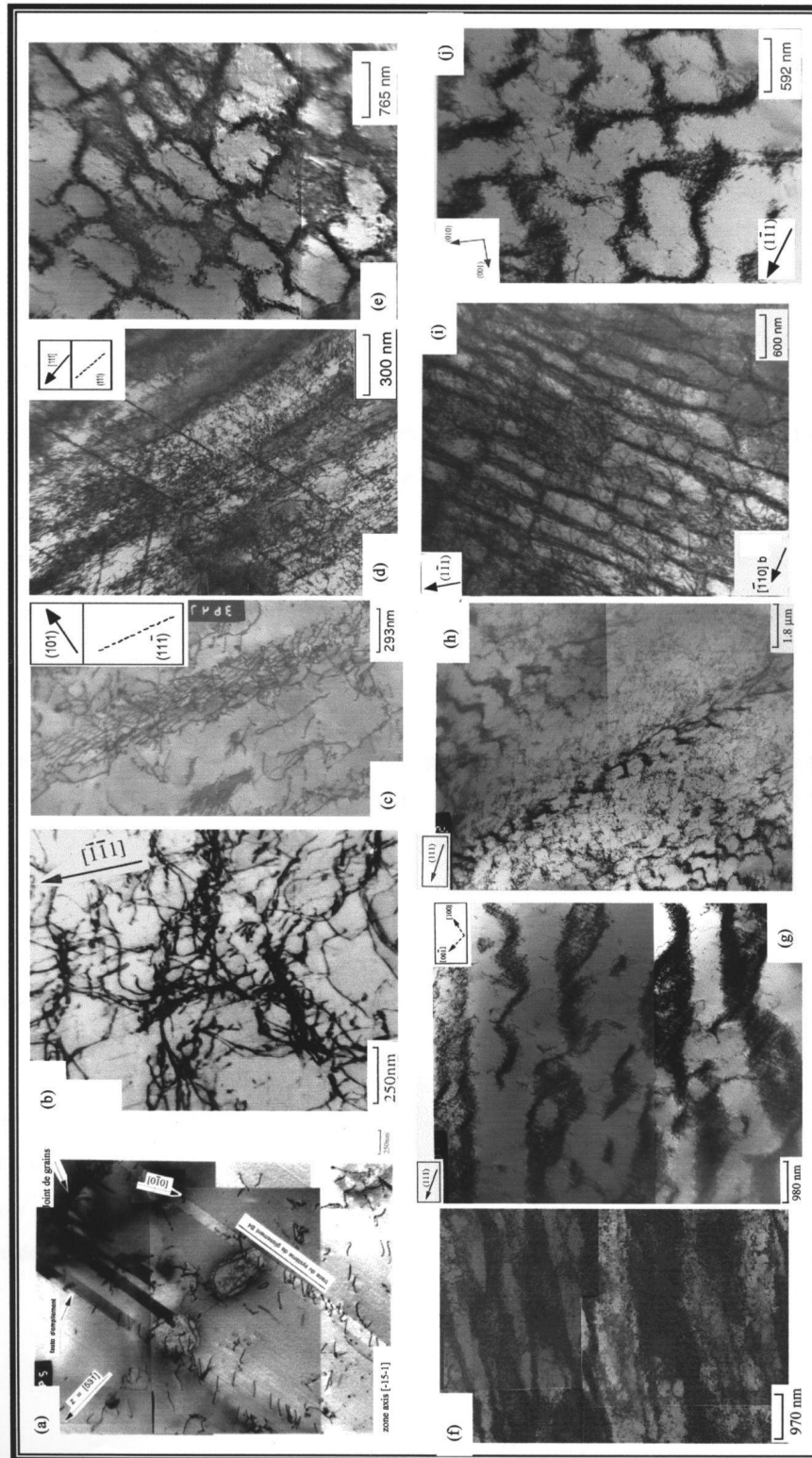
Avant de nous intéresser aux trajets cycliques à contrainte imposée pouvant conduire à du rochet, nous recensons les différentes structures de dislocations qui apparaissent lors d'un essai de traction monotone. D'après Feaugas [Feaugas 99], les structures présentes lors des essais de rochet découlent de celles obtenues lors de la première mise en charge, en traction. L'essai de traction est donc une étape importante dans la compréhension des mécanismes physiques responsables du phénomène de rochet.

### 1.2.2.1 Étude des structures de dislocations lors d'un trajet de traction monotone

Dans le cas d'une sollicitation uniaxiale monotone et pour des matériaux à faible énergie de défaut d'empilement (EDE) comme l'acier inoxydable 316L, Feaugas observe la formation de structures de dislocations planaires (empilements et défauts d'empilements) qui tendent ensuite à disparaître pour laisser place à des structures hétérogènes (amas, murs, cellules) [Feaugas 99] (une liste des différentes microstructures rencontrées lors d'essais d'écrouissage monotone ou cyclique uniaxiaux est donnée sur la figure 1.11). Le niveau de transition entre les zones de glissement simple et celles de glissement multiple se situe à environ 1,5% de déformation plastique pour l'acier inoxydable 316L, ce qui correspond d'ailleurs au moment où l'écrouissage isotrope commence à augmenter. À partir d'environ 3% de déformation plastique, Feaugas observe aussi l'apparition de maclage. La faible EDE rend le glissement dévié très difficile, ce qui génère de fortes contraintes internes au sein des grains. Le maclage nécessite alors une faible scission critique et apparaît tôt dans le processus de déformation comme moyen de relaxer les contraintes internes. Pour des matériaux à plus forte EDE (Cuivre, Aluminium), le glissement multiple est facilité, ce qui permet de former des structures hétérogènes de dislocations pour des niveaux de déformation plastique plus faibles, retardant du même coup l'apparition du maclage.

Une fois ces structures hétérogènes en place, Feaugas observe une diminution de leur taille en même temps qu'une augmentation du "contraste" entre les parois à forte densité de dislocations (et donc dures) et les canaux à faible densité de dislocations (mous) en fonction de la déformation plastique.

On peut relier la contrainte effective (contrainte à courte distance ou taille du domaine d'élasticité d'un point de vue plus macroscopique) à la densité des dislocations. En effet, l'augmentation de cette densité peut provoquer un "écrouissage latent" plus ou moins fort selon le type d'interactions entre dislocations (l'interaction la plus durcissante étant les verrous de Lomer-Cottrell) [Franciosi *et al.* 80, Franciosi 85]. Cet écrouissage latent représente l'augmentation de la contrainte d'écoulement d'un sys-



(a) glissement planaire, (b) amas de dislocations, (c) grilles, (d) murs polarisés et micro-macles, (e) cellules équiaxes, (f) longues cellules, (g) veines, (h) BCP, (i) murs dipolaires et (j) labyrinthes.

FIG. 1.11 – Liste des différentes microstructures développées en traction monotone et en fatigue à déformation plastique imposée, d'après [Gaudin 02]

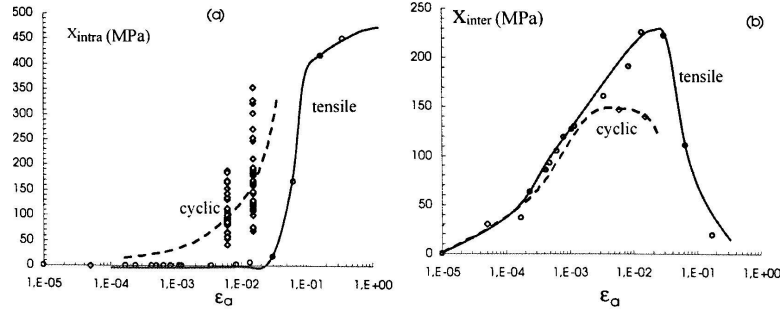


FIG. 1.12 – Partition de l'écrouissage cinématique macroscopique ( $X_{macro}$ ) entre contraintes internes intragranulaires ( $X_{intra}$ ) et contraintes internes intergranulaires ( $X_{inter}$ ), d'après [Feaugas et Gaudin 01]

tème de glissement due aux interactions entre les dislocations de ce système et celles des systèmes voisins (d'où la notion de matrice d'écrouissage que nous reverrons dans le modèle polycristallin de la section 1.3.2). L'écrouissage latent ne dépend pas du sens de sollicitation, ce qui explique l'augmentation de la contrainte effective à partir de l'activation du glissement multiple. L'écrouissage latent dépend aussi de l'énergie de défaut d'empilement. Plus cette dernière est grande, plus le glissement dévié est facile, ce qui permet de relaxer les interactions les plus fortes (écrouissage latent faible). Les contraintes internes à l'intérieur d'un polycristal sont dues à des incompatibilités de déformations plastiques entre grains (contraintes internes intergranulaires) et à l'intérieur des grains (contraintes internes intragranulaires), ces dernières étant associées à la distribution hétérogène de dislocations. En utilisant un modèle composite de type Mughrabi [Mughrabi 83], Feaugas [Feaugas 99] montre que la contrainte interne intragranulaire est fonction de la différence de densités de dislocations entre les zones dures et les zones molles à l'intérieur d'un grain. Ensuite, en supposant que l'écrouissage cinématique macroscopique est la somme des contraintes internes intra et intergranulaires, il montre que la contrainte interne intergranulaire augmente jusqu'à l'apparition du glissement dévié, suite à quoi elle diminue (le glissement dévié relaxant les contraintes internes en tête d'empilement) alors que la contrainte interne intragranulaire augmente tout au long de l'essai de traction (Fig. 1.12). Ces deux contraintes internes représentent à une échelle macroscopique l'écrouissage cinématique (translation du domaine d'élasticité) du matériau. Il est alors intéressant de noter qu'aucun modèle macroscopique phénoménologique n'a, à ma connaissance, fait le choix de partitionner l'écrouissage cinématique en deux écrouissages ayant ce type d'évolution.

### 1.2.2.2 Stabilité des structures de dislocations lors d'un chargement en retour.

Gaudin et Feaugas [Gaudin et Feaugas 99] ont réalisé plusieurs essais de décharge suite à une traction menée jusqu'à 6,93% de déformation plastique (le glissement mul-

triple est alors actif). Il ressort de cette étude que :

- L'écrouissage cinématique diminue évidemment lors du trajet en retour mais ne rattrape pas en valeur absolue le niveau que l'on aurait obtenu en continuant l'essai de traction pour le même niveau de déformation plastique équivalente.
- L'écrouissage isotrope augmente légèrement (+50 MPa) lors du trajet en retour puis diminue (−70 MPa pour 0,1% de déformation plastique en retour). L'écrouissage isotrope augmente à nouveau et rejoint la valeur obtenue en continuant l'essai de traction après 2% de déformation plastique.

Ces observations macroscopiques peuvent s'expliquer par l'analyse des structures de dislocations. Pour de faibles déformations plastiques en retour ( $< 0,1\%$ ), le pourcentage de grains présentant des structures hétérogènes (amas, murs, cellules) diminue pour atteindre une valeur de l'ordre de 20% pour 0,1%. La déformation est alors homogène dans la plupart des grains et l'écrouissage cinématique est nul. La densité des dislocations diminue dans les zones dures (murs de dislocations) et dans les zones molles (espaces inter-murs).

Pour des niveaux de déformation plastique en retour supérieurs à 0,1%, de nouvelles structures hétérogènes de dislocations se forment, augmentant la densité de dislocations dans les deux zones précédemment décrites.

### 1.2.2.3 Mécanismes de déformation plastique développés sous sollicitation cyclique à déformation plastique imposée

Un chargement cyclique à déformation plastique imposée a pour effet d'accélérer la transition glissement planaire-glissement dévié. En effet, les structures de dislocations hétérogènes (amas, murs, cellules mais aussi les veines, bandes de glissement persistantes et labyrinthes qui n'apparaissent que lors de sollicitations cycliques) apparaissent pour des niveaux d'amplitude de déformation plastique plus faibles que pour la traction. L'écrouissage cyclique est principalement lié à l'augmentation de la contrainte interne  $X$  associée aux structures hétérogènes de dislocation. Ainsi, pour une amplitude de déformation plastique de 2%, la contrainte interne est supérieure de 180 MPa à celle observée en traction simple. La contrainte effective n'augmente quant à elle que de 50 MPa.

### 1.2.2.4 Comportement cyclique sous contraintes imposées

Il existe deux domaines de contrainte maximale pour lesquels les évolutions de la déformation de rochet et de l'amplitude de déformation plastique sont différentes. Ces domaines sont reportés dans la figure 1.13 [Gaudin 02] et détaillés ci-après :

- $\Sigma_{max} < 340$  MPa ( $\epsilon_{traction}^p < 1,5\%$ ) : Le comportement est similaire quelle que soit la contrainte moyenne imposée. La déformation de rochet augmente très rapidement durant les 100 ou 200 premiers cycles (stade  $I_R$ ) puis tend à se stabiliser (stade  $II_R$ ). L'amplitude de déformation plastique croît dans les premiers cycles (adoucissement cyclique) puis se stabilise à une valeur constante.

		$R_0$	$R_I$		$R_{II}$	
$\Sigma_{max}$ (MPa)		$\Sigma_{max} < 230 \pm 20$	$230 < \Sigma_{max} < 340$		$\Sigma_{max} > 340$	
$\Sigma_m$ (MPa)		$\forall \Sigma_m$	$\Sigma_m < 50$	$\Sigma_m > 50$	$\Sigma_m < 50$	$\Sigma_m > 50$
Histoire		Stade I ( $\epsilon_p < 2 \cdot 10^{-4}$ ) $X_{inter}$ uniquement	Stade I ( $\epsilon_p < 1,5 \cdot 10^{-2}$ ) $X_{inter}$ uniquement		Stades II/III ( $\epsilon_p > 1,5 \cdot 10^{-2}$ ) $X_{inter}$ et $X_{intra}$	
<b>Stade <math>I_R'</math></b>	$\epsilon_a = f(N)$	Absent	Absent			Absent
	$d\epsilon_r/dN = f(N)$					
<b>Stade <math>I_R</math></b>	$\epsilon_a = f(N)$					
	$d\epsilon_r/dN = f(N)$					
<b>Stade <math>II_R</math></b> ( $\epsilon_a$ et $d\epsilon_r/dN$ sont constants)	$\epsilon_a = f(\Sigma_{max})$					
	$d\epsilon_r/dN = f(\Sigma_{max})$	$\sim 0$				
	$\epsilon_a = f(\Sigma_m)$					
	$d\epsilon_r/dN = f(\Sigma_m)$	$\sim 0$				

FIG. 1.13 – Synthèse des évolutions de l'amplitude de déformation plastique  $\epsilon_a$  et de la vitesse de rochet  $d\epsilon_r/dN$ , en fonction de la contrainte macroscopique maximale au cours du cycle  $\Sigma_{max}$  et de la contrainte macroscopique moyenne au cours du cycle  $\Sigma_{moy}$ , d'après [Gaudin 02]

- $\Sigma_{max} > 340$  MPa : Le comportement dépend cette fois-ci de la valeur de la contrainte moyenne. Pour de fortes contraintes moyennes ( $\Sigma_m > 50$  MPa), la déformation progressive évolue de la même manière que pour de faibles contraintes maximales. En revanche, l'amplitude de déformation plastique reste constante. Pour de faibles contraintes moyennes ( $\Sigma_m < 50$  MPa), on observe une augmentation de la vitesse de rochet (stade  $I_R'$ ), puis une diminution et enfin une stabilisation. Dans le même temps, l'amplitude de déformation plastique augmente (adoucissement cyclique), puis diminue et enfin se stabilise à une valeur constante.

La contrainte de transition entre les deux domaines correspond à la contrainte de transition entre glissement simple planaire et formation de structures de dislocations hétérogènes lors d'un essai de traction simple. Pour de faibles contraintes maximales, les incompatibilités de déformation plastique sont uniquement de type intergranulaire. En revanche, dans le domaine des fortes contraintes maximales, des amas, murs et

cellules sont formés dès le premier quart de cycle en traction, ce qui conduit à des incompatibilités de déformation plastique de types inter et intragranulaire. Cette différence d'état initial avant le trajet cyclique pourrait expliquer les différences de comportement observées. Cependant, le trajet cyclique favorise le glissement dévié. Par conséquent, il est aussi judicieux d'observer le comportement en rochet vis-à-vis de la contrainte d'activation de glissement dévié, sous sollicitation cyclique. De fait, Gaudin et Feaugas ont observé que pour une contrainte maximale en dessous de cette contrainte d'activation cyclique, la vitesse de rochet était inférieure à la vitesse de fluage statique [Gaudin et Feaugas 99]. Par conséquent, le phénomène de rochet n'est actif que lorsque des structures hétérogènes de dislocations se sont formées, c'est-à-dire pour  $\Sigma_{seuil} = 230$  MPa en ce qui concerne l'acier inoxydable 316L, avec une taille de grains de  $50\mu m$ . La taille de grains est importante puisque la contrainte macroscopique d'activation du glissement dévié est fonction non seulement de la contrainte seuil microscopique d'activation du glissement dévié mais aussi de l'état de contrainte interne et notamment des contraintes internes intergranulaires. Or, ces dernières sont d'autant plus importantes que la taille des grains est petite. Par conséquent, une petite taille de grains favorise le glissement dévié et donc le rochet.

Le fait d'avoir besoin de structures hétérogènes de dislocations pour obtenir du rochet est en accord avec les observations de Lorenzo et Laird [Lorenzo et Laird 84]. Selon ces auteurs, la déformation plastique de rochet semble résulter de la destruction des cellules de dislocations lors de la décharge. Cette destruction donne lieu à une distribution homogène de dislocations à partir de laquelle de nouvelles cellules se forment lors de la remise en charge suivante. Les auteurs suggèrent que le glissement dévié favorise la dissolution des cellules et donc le phénomène de rochet.

Enfin, la vitesse de rochet est maximale pour une contrainte moyenne d'environ 50 MPa ( $\forall \Sigma_{max}$ ).

### 1.2.3 Chargements multiaxiaux non-proportionnels

#### 1.2.3.1 Surécrouissage et structures de dislocations

L'écrouissage cyclique sous chargement proportionnel est associé, dans l'acier inoxydable 316L, à la formation de structures de dislocations hétérogènes (amas, murs, cellules), structures qui sont par ailleurs pratiquement absentes lors d'une sollicitation monotone ( $\epsilon^p < 1,5\%$ ). Néanmoins, le pourcentage de grains présentant des glissements planaires reste supérieur à 40%. La transition entre glissement planaire et glissement ondulé est liée à la non-proportionnalité du chargement. Ainsi, des cellules sont observées dans 90% des grains suite aux trajets non-proportionnels présentant le plus grand surécrouissage [Bocher *et al.* 01]. Cette observation est en accord avec d'autres travaux [Doquet et Pineau 90], [Clavel et Feaugas 94] qui suggèrent que le surécrouissage n'est pas seulement lié à la multiplicité des glissements mais aussi à la formation de structures hétérogènes de dislocations. Bocher *et al.* [Bocher *et al.* 01] ont observé du maclage dans quelques grains lors de trajets non-proportionnels, mais pas suffisam-

ment cependant pour que ce mécanisme soit prépondérant devant l'écrouissage latent ou la formation de structures hétérogènes. Toutefois, le maclage pourrait être responsable d'une partie de l'effet mémoire rencontré dans le 316L. En effet, la diminution du niveau de chargement pourrait faire subsister les macles installées lors des trajets plus durcissants [Doquet et Pineau 90]. Enfin, le phénomène de surécrouissage est très dépendant de l'énergie de défaut d'empilement (EDE). En effet, pour des matériaux à forte EDE comme l'aluminium, le phénomène de surécrouissage est quasiment inexistant, ce qui s'explique par la relative facilité du glissement dévié. De nombreux systèmes de glissement sont alors activés permettant la formation de structures tridimensionnelles y compris pour des chargements uniaxiaux [Doquet 89], [Doong *et al.* 90]. En utilisant le modèle composite cité précédemment mais aussi grâce à certaines mesures expérimentales, Bocher *et al.* [Bocher *et al.* 01] montrent que le phénomène de surécrouissage est essentiellement dû à une augmentation des contraintes internes à grande distance intragranulaire qui se traduisent par un écrouissage cinématique d'un point de vue macroscopique. Les contraintes internes intergranulaires sont maximales pour des chargements proportionnels mais diminuent ensuite lorsque des structures hétérogènes entrent en jeu, notamment dans les essais non-proportionnels. L'écrouissage isotrope (augmentation de la contrainte effective) n'est apparemment significatif que pour l'essai non-proportionnel le plus durcissant. Cependant, d'après Clavel *et al.* [Clavel *et al.* 89], un trajet non-proportionnel permet d'activer un plus grand nombre de systèmes de glissement, ce qui peut provoquer un écrouissage latent se traduisant par un écrouissage isotrope au niveau macroscopique. Par ailleurs, selon Docquet [Doquet 89], la diminution de la taille des cellules qui accompagne le surécrouissage du 316L entraîne une augmentation de la contrainte d'écoulement des systèmes de glissement, et donc un écrouissage isotrope. Enfin, des essais réalisés par cet auteur [Doquet 93] sur un alliage  $Co_{33}Ni$  à faible EDE montrent que le surécrouissage, principalement dû cette fois à du maclage, se répercuterait plutôt sur la taille du domaine d'élasticité que sur sa translation. Il semble alors qu'il y ait une contradiction entre les observations faites par Bocher *et al.* [Bocher *et al.* 01] concernant la contrainte effective et l'hypothèse généralement faite en modélisation macro et micro-macro [Cailletaud 87], à savoir que le surécrouissage peut n'être introduit que dans la variable d'écrouissage isotrope. Des essais non-proportionnels avec détections complètes du domaine d'élasticité devraient nous permettre de trancher sur ce point.

### 1.2.3.2 Rochet multiaxial et structures de dislocations

Comme dans le cas de trajets uniaxiaux, la déformation progressive semble être une fonction croissante de l'écrouissage intragranulaire associé aux structures hétérogènes de dislocations. En fait, le taux de rochet est le résultat d'une compétition entre la formation et la dissolution de structures cellulaires, l'instabilité de ces structures étant inversement proportionnelle à leur taille. Ces résultats corroborent ceux émis par Gaudin et Feaugas [Gaudin et Feaugas 00] dans le cas de trajets uniaxiaux. La non-proportionnalité du chargement peut alors être interprétée comme un moyen

d'augmenter "rapidement" le nombre et l'intensité (*i.e.* le contraste entre densités de dislocations dans les murs et les chenaux) de ces structures hétérogènes.

#### **1.2.4 Conclusion sur les mécanismes physiques liés à la déformation progressive**

D'après les travaux de Gaudin et Feaugas, le phénomène de rochet ne semble pas être actif lorsque les structures de dislocations sont uniquement planaires (empilements et défauts d'empilements). L'irréversibilité associée à l'activation du glissement dévié est une condition nécessaire au mécanisme de rochet cyclique. Il existe donc une contrainte maximum seuil en dessous de laquelle il n'y a pas de rochet. Cette contrainte seuil vaut 230 MPa pour l'acier inoxydable 316L soumis à un chargement cyclique uniaxial.

Au delà de cette contrainte, des structures hétérogènes se forment ce qui conduit à une diminution des contraintes internes intergranulaires et à une augmentation des contraintes internes intragranulaires au cours des cycles. La vitesse de rochet semble être d'autant plus élevée que les structures de dislocations sont hétérogènes, les murs polarisés étant sans doute les structures les plus favorables [Gaudin et Feaugas 00]. La non-proportionnalité du chargement favorise la formation de structures hétérogènes de dislocations et, par là même, provoque une augmentation des contraintes internes intragranulaires ainsi qu'une augmentation du phénomène de déformation progressive.



### 1.3 Modèles phénoménologiques développés pour décrire le rochet multiaxial

L'objet de cette partie n'est pas de recenser tous les modèles existant dans la littérature et capables de représenter qualitativement le phénomène de déformation progressive. Nous nous contenterons de quelques modèles qui ont servi de base à de nombreuses modifications ultérieures.

La modélisation du comportement mécanique des matériaux peut être abordée, comme l'étude expérimentale des phénomènes, à plusieurs échelles. Il y a tout d'abord, l'échelle macroscopique de l'élément de volume, où l'on ne cherche à décrire que l'évolution de grandeurs mesurables à cette échelle, c'est-à-dire la contrainte, la déformation et la température. A l'inverse, des modèles micro-macro ont été créés pour prendre en compte les mécanismes physiques microscopiques dans la modélisation. Ces derniers modèles s'appuient alors sur un changement d'échelle pour passer des grandeurs macroscopiques aux grandeurs microscopiques et inversement.

Ces deux types d'approches sont complémentaires. En effet, les modèles macroscopiques contiennent moins d'information physique et ont donc un domaine de validité qui reste souvent limité aux essais utilisés pour identifier le modèle. En revanche, ils possèdent peu de variables internes et permettent des calculs rapides. A l'inverse, les modèles micro-macro ont une base physique plus solide et sont donc a priori plus robustes que les modèles macroscopiques. Malheureusement, ils contiennent beaucoup plus de variables internes que les modèles macroscopiques (jusqu'à 100 fois plus) ce qui conduit à des temps de calcul encore prohibitifs pour l'utilisation de ce type de modèles dans des calculs de structures. Toutefois, nous verrons qu'il est possible d'utiliser les informations données par un modèle polycristallin pour construire "correctement" un modèle macroscopique, par exemple en complétant une base d'essais insuffisante [Erieau *et al.* 00].

Comme pour les aspects expérimentaux, nous présentons quelques modèles macroscopiques avant de détailler un modèle micro-macro que nous avons utilisé dans la suite de ce travail.

#### 1.3.1 Modèles macroscopiques

Le comportement élasto-plastique des matériaux métalliques peut être décrit en postulant l'existence d'un domaine d'élasticité fermé dans l'espace des contraintes, initialement centré sur l'origine des contraintes et à l'intérieur duquel tout chargement reste élastique et suit la loi de Hooke :

$$\varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}tr[\sigma]\mathbb{I} \quad (1.1)$$

avec  $E$  le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson et  $\varepsilon^e$  les déformations élastiques développées sous l'état de contrainte  $\sigma$ .

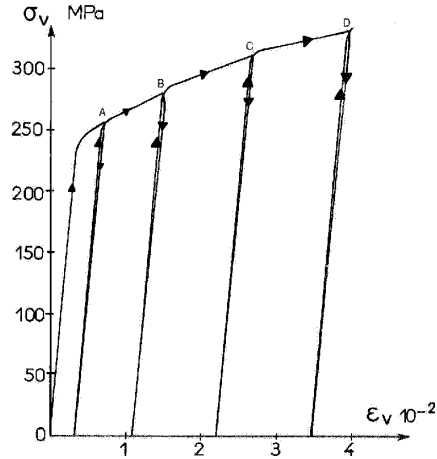


FIG. 1.14 – Courbe d'écrouissage avec décharges et recharges sur un alliage d'Aluminium AU4G, d'après [Lemaitre et Chaboche 88]

Le comportement du matériau devient ensuite plastique (ou élasto-plastique) lorsque le niveau de contrainte atteint le bord du domaine d'élasticité. La thermodynamique et les expériences phénoménologiques justifient alors de retenir la partition des déformations totales en déformation réversible ou élastique  $\varepsilon^e$  d'une part et déformation irréversible ou inélastique  $\varepsilon^p$  d'autre part [Lemaitre et Chaboche 88]. Cette dernière déformation peut être viscoplastique ou plastique. On a ainsi :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.2)$$

En considérant cette partition, la loi de Hooke reste valable et permet toujours de relier les déformations élastiques aux contraintes, même lorsque le matériau est plastifié. L'écrouissage du matériau implique que le niveau de contrainte puisse dépasser la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  du matériau définie par la taille initiale du domaine d'élasticité. Or, les observations expérimentales montrent qu'une décharge suite à un écoulement plastique du matériau s'effectue à l'intérieur du domaine d'élasticité (décharge élastique). De plus, si l'on repart dans la précédente direction de charge, la plasticité réapparaît pour la même contrainte que la précédente contrainte de début de décharge. Par exemple, sur la figure 1.14, une décharge élastique a lieu au point A et une nouvelle montée en charge (pour aller jusqu'au point B par exemple) provoque à nouveau un écoulement plastique en A. Ces propriétés sont prises en compte en imposant au point de chargement de ne pas sortir du domaine d'élasticité. L'écrouissage du matériau est alors pris en compte par une variable cinématique  $\mathbb{X}$  qui translate le domaine d'élasticité et/ou une variable isotrope  $R$  qui le fait grossir dans l'espace des contraintes. Le critère le plus couramment utilisé pour définir le domaine d'élasticité est le critère de von Mises qui peut s'écrire :

$$F(\sigma, \mathbb{X}, R) = \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}[(\sigma^D - \mathbb{X})^T (\sigma^D - \mathbb{X})]} - R \quad (1.3)$$

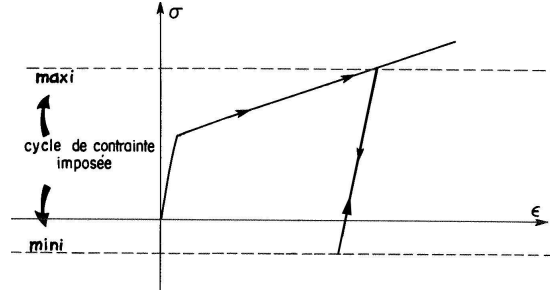


FIG. 1.15 – Simulation d'un essai de rochet uniaxial avec un écrouissage isotrope

avec  $\sigma^D$  le déviateur de  $\sigma$ . Ce critère garantit un comportement plastique indépendant de la pression hydrostatique (phénomène observé expérimentalement).  $R$  prend pour valeur initiale  $\sigma_Y$ .

Le comportement du matériau est :

- élastique si  $F < 0$ ,
- plastique si  $F = 0$  et  $\dot{F} = 0$ .

D'autre part, d'après le principe de travail maximal de Hill, l'écoulement plastique est orienté selon la normale au domaine d'élasticité, ce qui s'écrit :

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (1.4)$$

avec  $\dot{\lambda}$  le multiplicateur plastique qui s'obtient grâce à la condition de cohérence :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} : \dot{\sigma} + \frac{\partial F}{\partial \mathbb{X}} : \dot{\mathbb{X}} + \frac{\partial F}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (1.5)$$

et aux équations d'évolution :

$$\dot{\mathbb{X}} = g_1(\dot{\epsilon}^P) \quad \text{et} \quad \dot{R} = g_2(\dot{p}) \quad (1.6)$$

avec  $\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P}$  le taux de déformation plastique cumulé (égal ici à  $\dot{\lambda}$ ).

En adoptant le critère de von Mises et l'hypothèse de normalité, la qualité de description du comportement plastique du matériau vient alors uniquement des lois d'évolution (1.6) retenues pour les variables  $\mathbb{X}$  et  $R$ . En ce qui concerne le phénomène de rochet, notamment en uniaxial, une augmentation de la taille du domaine d'élasticité provoque une adaptation immédiate et ne peut donc pas provoquer de déformation progressive (Fig. 1.15). L'écrouissage isotrope n'est donc pas la bonne variable à considérer pour représenter ce phénomène. C'est pourquoi tous les efforts ont été portés sur la variable d'écrouissage cinématique.

### 1.3.1.1 Écrouissage cinématique linéaire de Prager [Prager 58]

La loi d'écrouissage cinématique linéaire de Prager [Prager 58] s'écrit :

$$\dot{\mathbb{X}} = C \dot{\epsilon}^P \quad (1.7)$$

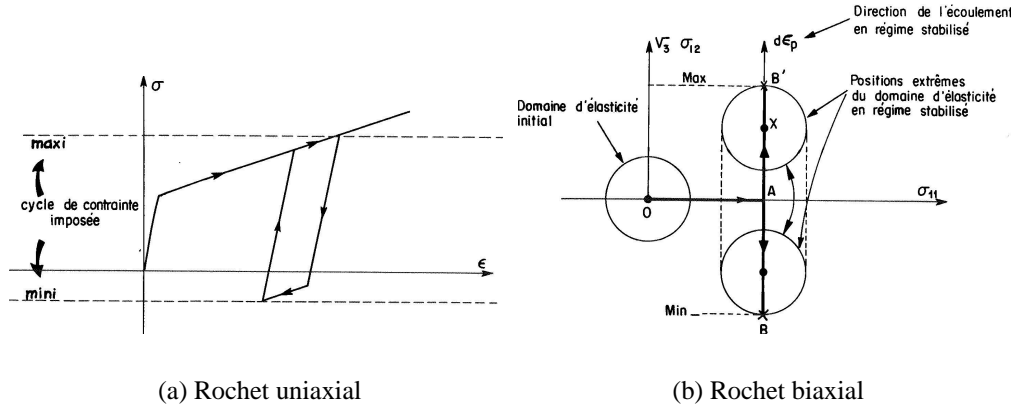


FIG. 1.16 – Simulation du phénomène de rochet avec un écrouissage cinématique linéaire, d'après [Lemaitre et Chaboche 88]

C'est une loi on ne peut plus simple mais qui malheureusement prédit l'accommodation dès le premier cycle en rochet uniaxial (1.16(a)). Pour des essais de rochet 2D, une déformation progressive pourra apparaître selon la contrainte moyenne, mais elle finira toujours par s'arrêter au bout d'un certain nombre de cycles. En effet, la loi (1.7) prévoit une translation du domaine d'élasticité selon la contrainte moyenne tant que l'incrément de déformation plastique par cycle n'est pas nul, c'est-à-dire tant qu'il y a du rochet (Fig. 1.16(b)).

### 1.3.1.2 Écrouissage cinématique non-linéaire d'Armstrong-Frederick [Armstrong et Frederick 66]

L'écrouissage monotone et cyclique des matériaux est clairement non-linéaire par rapport à la déformation plastique. Armstrong et Frederick [Armstrong et Frederick 66] ont alors proposé la loi suivante :

$$\dot{\mathbb{X}} = C\dot{\varepsilon}^p - \gamma\mathbb{X}\dot{\varepsilon}^p \quad (1.8)$$

qui permet de bien décrire l'écrouissage du matériau. Cette loi permet également de représenter qualitativement le phénomène de relaxation de la contrainte moyenne et le phénomène de rochet (Fig. 1.17). En fait, ce modèle prévoit un pas de rochet constant pour un chargement de rochet uniaxial. Il est égal à :

$$\delta\varepsilon^p = \frac{1}{\gamma} \ln \left( \frac{\left(\frac{C}{\gamma}\right)^2 - (X_{min})^2}{\left(\frac{C}{\gamma}\right)^2 - (X_{max})^2} \right) \quad (1.9)$$

ce qui est contraire aux résultats expérimentaux où l'on observe une diminution du pas de rochet, voire un arrêt de ce dernier selon le niveau de chargement <sup>5</sup>.

5. pour des matériaux à durcissement cyclique.

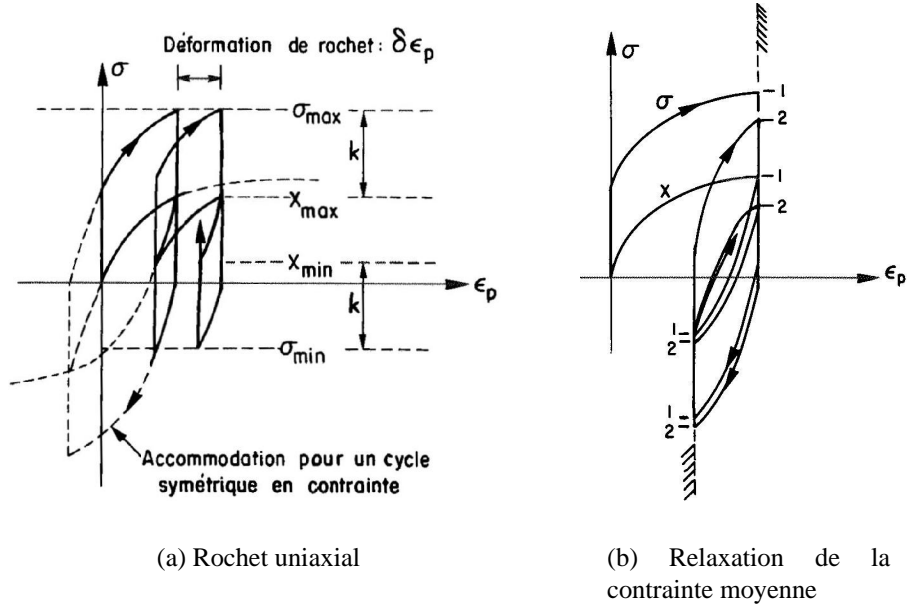


FIG. 1.17 – Propriétés cycliques intéressantes de l'écrouissage cinématique non-linéaire proposé dans [Armstrong et Frederick 66], d'après [Lemaitre et Chaboche 88]

### 1.3.1.3 Combinaison de plusieurs écrouissages cinématiques

Pour des essais uniaxiaux, l'écrouissage cinématique linéaire produit une accommodation en un cycle alors que l'écrouissage cinématique non-linéaire produit un rochet à pas constant. Chaboche [Chaboche 87] propose donc de construire la translation du domaine d'élasticité à partir de plusieurs variables :

$$\mathbb{X} = \sum_{i=1}^n \mathbb{X}_{(i)} \quad (1.10)$$

avec, par exemple, une variable cinématique linéaire et une autre non-linéaire. Par cette méthode, on obtient bien du rochet uniaxial dont le pas diminue au cours des cycles. En outre, la description de la courbe d'écrouissage monotone peut elle aussi être améliorée en utilisant plusieurs variables cinématiques. On peut ainsi choisir une variable pour gérer la transition entre le régime élastique et élastoplastique, une autre pour décrire le comportement quasi-linéaire pour de "grandes" déformations ( $\epsilon > 2\%$ ), et enfin une dernière pour décrire la zone intermédiaire (Fig. 1.18). Malheureusement, dans le cas d'essais uniaxiaux, cette astuce ne permet pas d'obtenir une bonne représentation à la fois de la déformation progressive, de la courbe de traction monotone et du comportement cyclique à déformation imposée [Chaboche *et al.* 89]. La déformation progressive est souvent surestimée ou bien c'est le module d'écrouissage de la courbe de traction monotone qui l'est. De plus, la déformation progressive cesse tou-

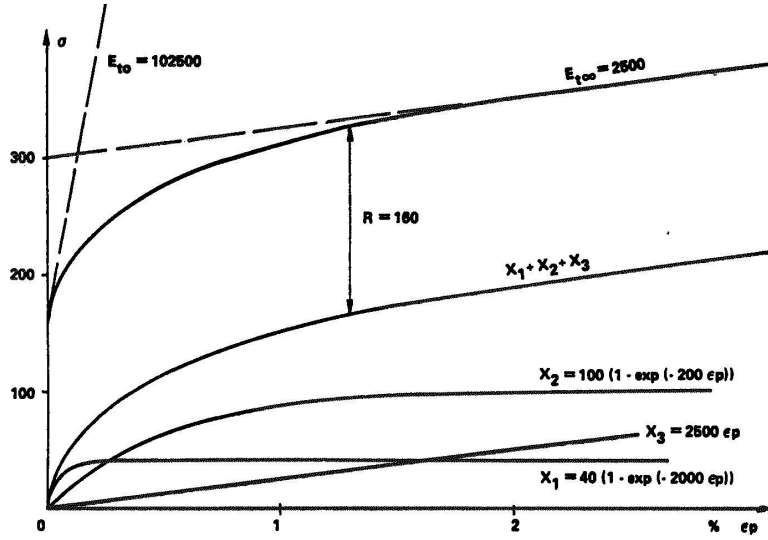


FIG. 1.18 – Utilisation de 3 variables cinématiques pour décrire l'écrouissage monotone d'un matériau, d'après [Lemaitre et Chaboche 88]

jours au bout d'un certain nombre de cycles, du fait de l'écrouissage cinématique linéaire. Cette accommodation arrive d'autant plus tard que le module (*i.e.* le coefficient  $C$ ) de la variable linéaire est faible par rapport au module des deux autres variables.

#### 1.3.1.4 Introduction de contraintes seuil

Pour décrire quantitativement les effets observés expérimentalement, Chaboche [Chaboche 91] propose une évolution des variables cinématiques intermédiaire entre linéaire et non-linéaire. Il introduit la notion de contrainte seuil  $X_l$  à partir de laquelle l'écrouissage devient non-linéaire, et en-dessous de laquelle l'évolution de la variable est linéaire :

$$\dot{\mathbb{X}}_{(i)} = C_{(i)} \dot{\varepsilon}^p - \gamma_{(i)} \left\langle 1 - \frac{X_l}{\|\mathbb{X}_{(i)}\|} \right\rangle \mathbb{X}_{(i)} \dot{\varepsilon}^p \quad (1.11)$$

avec  $\langle u \rangle$  les crochets de Mc Cauley :  $\langle u \rangle = u$  si  $u > 0$  et  $\langle u \rangle = 0$  si  $u < 0$ .

Ainsi, pour de faibles sollicitations, la variable  $\mathbb{X}_{(i)}$  restera inférieure à  $X_l$ , ce qui produira une accommodation au bout de quelques cycles si, par ailleurs, le modèle comprend d'autres variables cinématiques dont l'évolution est purement non-linéaire. Si l'on augmente, en revanche, la contrainte moyenne de sollicitation, la variable  $\mathbb{X}_{(i)}$  dépassera  $X_l$  et aura donc une évolution mixte - linéaire pour la partie basse du cycle (entre  $X_{(i)min}$  et  $X_l$ ) et non-linéaire pour la partie haute (entre  $X_l$  et  $X_{(i)max}$ ) - ce qui produira d'autant plus de rochet que la partie d'évolution non-linéaire sera importante. Chaboche propose une généralisation de son modèle [Chaboche 92] en affectant à toutes les variables cinématiques l'équation d'évolution (1.11). Il parvient ainsi à retrouver la plupart des résultats de rochet uniaxial et notamment ceux obtenus par

Goodman (Fig. 1.4(a)) [Goodman 83].

### 1.3.1.5 Modèle d'Ohno et Wang

Ohno et Wang reprennent le même type d'idée que Chaboche et définissent pour chaque variable cinématique l'équation d'évolution suivante [Ohno et Wang 93] :

$$\dot{\mathbb{X}}_{(i)} = C_{(i)}\dot{\epsilon}^p - \gamma_{(i)} \left( \frac{\|\mathbb{X}_{(i)}\|}{C_{(i)}/\gamma_{(i)}} \right)^{m_{(i)}} \mathbb{X}_{(i)} \left\langle \dot{\epsilon}^p : \frac{\mathbb{X}_{(i)}}{\|\mathbb{X}_{(i)}\|} \right\rangle \quad (1.12)$$

Ils s'appuient sur le fait que  $\|\mathbb{X}_{(i)}\|$  reste toujours inférieur ou égal à sa valeur de saturation  $C_{(i)}/\gamma_{(i)}$ . En choisissant un coefficient  $m_{(i)}$  suffisamment grand, le terme de rappel de l'équation (1.12) reste alors négligeable tant que  $\|\mathbb{X}_{(i)}\|$  est loin de sa valeur de saturation, ce qui limite le rochet. Le fait de choisir une évolution non-linéaire pour le terme de rappel permet d'obtenir des courbes d'écrouissage moins abruptes que dans le modèle de Chaboche (sauf si les coefficients  $m_{(i)}$  sont très élevés).

L'apport essentiel du modèle d'Ohno et Wang réside dans le fait que le terme de rappel n'est plus proportionnel à  $\dot{p}$  mais à la partie positive du produit scalaire entre le taux de déformation plastique et la variable d'écrouissage cinématique. Cette différence joue un rôle minime dans les essais de rochet uniaxial<sup>6</sup> mais elle est importante lors des essais multiaxiaux non-proportionnels.

### 1.3.1.6 Modélisation du rochet multiaxial

En prenant plusieurs variables d'écrouissage cinématique qui suivent les lois d'évolution du modèle de Chaboche ou d'Ohno et Wang, on parvient à représenter la plupart des phénomènes rencontrés en rochet uniaxial. En revanche, lorsque l'on essaie de simuler des trajets de rochet 2D, ces modèles, et surtout le modèle de Chaboche, surestiment la réponse expérimentale. Pour remédier à ce problème, une idée est donc de limiter le terme de rappel lors des trajets non-proportionnels pour que le domaine d'élasticité vienne se centrer plus rapidement autour de la contrainte moyenne, comme dans la figure 1.16(b). L'écoulement plastique est alors uniquement orienté dans la direction du chargement secondaire.

Ohno et Wang proposent donc de tirer parti du fait que, lors de trajets non-proportionnels, l'écrouissage cinématique et le taux de déformation plastique ne sont plus colinéaires. En multipliant le terme de rappel par le produit scalaire de ces deux quantités, il parviennent ainsi à limiter le terme de rappel dans les essais non-proportionnels sans pour autant affecter la réponse uniaxiale.

D'autres auteurs choisissent plutôt de faire dépendre l'exposant  $m_{(i)}$  d'un indicateur de non-proportionnalité [Jiang et Sehitoglu 96]. Enfin, Burlet et Cailletaud proposent

6. Les décharges sont linéaires tant que la variable d'écrouissage cinématique n'est pas de même signe que le taux de déformation plastique. Cela se traduit par moins de déformation progressive qu'avec  $\dot{p}$ .

[Burlet et Cailletaud 87] de modifier la direction du terme de rappel de l'écrouissage cinématique. Ils choisissent de prendre pour cette direction le taux de déformation plastique, d'où le nom d'"évanescence radiale", ce qui peut s'écrire en tenant compte des modifications utiles pour le rochet uniaxial :

$$\dot{\mathbb{X}}_{(i)} = C_{(i)} \dot{\varepsilon}^P - \gamma_{(i)} \left( \frac{\|\mathbb{X}_{(i)}\|}{C_{(i)}/\gamma_{(i)}} \right)^{m_{(i)}} (\mathbb{N} : \mathbb{X}_{(i)}) \dot{\varepsilon}^P \quad (1.13)$$

avec  $\mathbb{N}$  la normale au domaine d'élasticité.

Cette modification est radicale dans le sens où elle provoque une accommodation au bout de quelques cycles en rochet biaxial. Delobelle et Robinet [Delobelle et Robinet 93] proposent alors de construire un terme de rappel intermédiaire qui peut s'écrire :

$$\dot{\mathbb{X}}_{(i)} = C_{(i)} \dot{\varepsilon}^P - \gamma_{(i)} \left( \frac{\|\mathbb{X}_{(i)}\|}{C_{(i)}/\gamma_{(i)}} \right)^{m_{(i)}} (\delta \mathbb{X}_{(i)} + (1 - \delta) (\mathbb{N} : \mathbb{X}_{(i)}) \mathbb{N}) \dot{\varepsilon}^P \quad (1.14)$$

avec  $\delta$  un coefficient matériau à identifier. Pour  $\delta = 0$ , on obtient une évanescence radiale et pour  $\delta = 1$ , on retrouve une évanescence classique.

Toutefois, Portier *et al.* ont montré [Portier *et al.* 00] que de telles modifications ne permettaient pas de retrouver le bon niveau de déformation progressive pour une large base d'essais uniaxiaux et multiaxiaux. Le modèle d'Ohno et Wang était le plus performant mais restait encore assez loin de certains résultats expérimentaux.

### 1.3.1.7 Bilan des modèles macroscopiques

La modélisation du phénomène de rochet uniaxial peut être considérée comme en partie résolue en employant plusieurs variables d'écrouissage cinématique et en retenant par exemple les équations d'évolution du modèle de Chaboche [Chaboche 91] ou celles du modèle d'Ohno et Wang [Ohno et Wang 93].

Le passage au rochet multiaxial reste encore un point dur dans la modélisation. En effet, d'après certains travaux [Portier *et al.* 00], [Bari et Hassan 00], [Bari et Hassan 02], les modèles proches de celui proposé par Ohno et Wang ne sont pas encore capables de prédire quantitativement à la fois les cinétiques de rochet uniaxial et celles de rochet multiaxial. La plupart des auteurs s'accordent à dire que le phénomène de rochet uniaxial est uniquement lié à l'écrouissage cinématique du matériau, alors que dans le cas du rochet multiaxial, un effet de direction de l'écoulement plastique est à prendre (correctement) en compte. Les erreurs de prévision seraient donc dues à une mauvaise prévision de cette direction de l'écoulement plastique.

Parmi les raisons invoquées, on trouve le plus souvent que l'hypothèse d'un domaine d'élasticité de von Mises est une hypothèse trop forte au regard des nombreux travaux expérimentaux mettant plutôt en évidence une distorsion de ce domaine (certains de ces travaux seront rapportés dans le chapitre suivant). En effet, si l'on ne prend pas en compte ce phénomène de distorsion tout en conservant l'hypothèse que l'écoulement



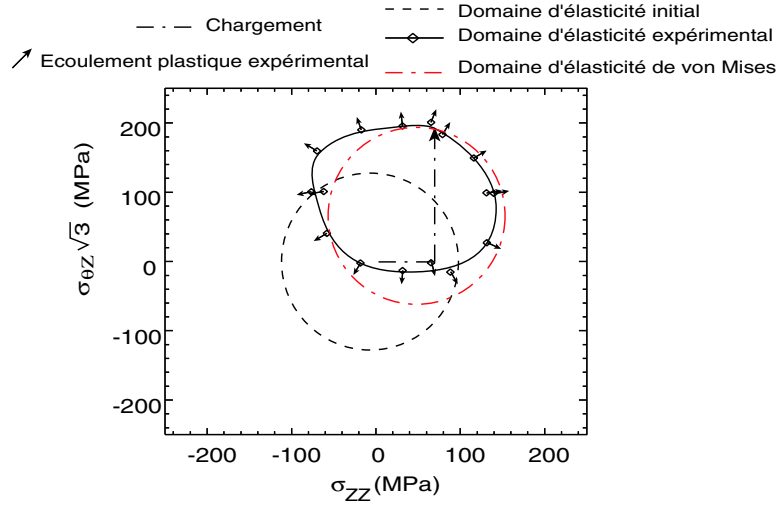


FIG. 1.19 – Décalage nécessaire vers  $\sigma_{ZZ} > 0$  du domaine d'élasticité de von Mises par rapport au domaine d'élasticité expérimental pour obtenir la même direction d'écoulement plastique

plastique est normal au domaine d'élasticité, il est alors nécessaire de modifier artificiellement les lois d'écrouissage cinématique pour représenter les résultats expérimentaux. Par exemple, si l'on souhaite représenter l'accommodation suite à une simulation de rochet biaxial classique ( $\sigma_{ZZ} = Cte$  et  $\epsilon_{\theta Z} = \pm \epsilon_{\theta Zmax}$ ), le domaine d'élasticité de von Mises devra plus se traduire dans la direction axiale qu'un domaine d'élasticité expérimental et distordu (Fig. 1.19). De telles modifications ne sont à l'évidence pas immédiates et c'est la raison pour laquelle nous nous proposons de suivre les idées lancées dans [Portier *et al.* 00], [Bari et Hassan 00], [Bari et Hassan 02] : ces auteurs préconisent de prendre en compte la distorsion du domaine d'élasticité dans les modèles macroscopiques phénoménologiques pour améliorer la prévision de la direction de l'écoulement plastique et, par voie de conséquence, la prévision du rochet multiaxial.

### 1.3.2 Modèles micro-macro

Nous ne présentons ici qu'un seul modèle micro-macro, l'objectif étant simplement d'illustrer les capacités de ce type de modèle par rapport aux modèles macroscopiques<sup>7</sup>. Il s'agit du modèle polycristallin développé au Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris par Cailletaud [Cailletaud 87] et Pilvin [Pilvin 90]. Ce modèle micro-macro est basé sur des mécanismes physiques de glissement plastique cristallin et peut rendre compte qualitativement et quantitativement de la plupart des phénomènes rencontrés dans des chargements monotones et cycliques, y compris le rochet multiaxial [Pilvin et Geyer 97]. Un autre atout de ce modèle, en ce qui nous concerne,

7. Citons toutefois les travaux de Abdul-Latif [AL 02].

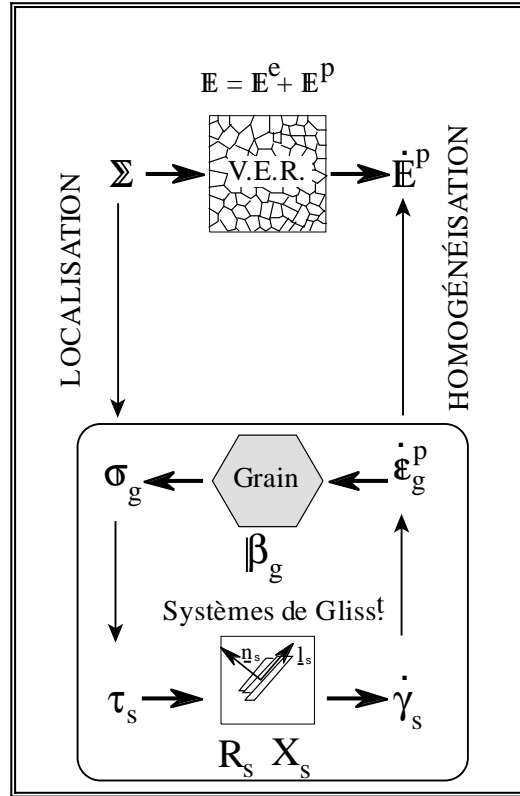


FIG. 1.20 – *Principe de fonctionnement du modèle polycristallin*

est qu'il prévoit aussi la distorsion du domaine d'élasticité. La version du modèle que nous présentons n'est pas la dernière en date mais elle est néanmoins suffisamment performante. Enfin, à ma connaissance, les observations microscopiques faites à l'échelle des dislocations et reportées dans la partie 1.2 (notamment la forme et l'intensité des structures de dislocations) n'ont pas encore pu être toutes intégrées dans ce type de modélisation. De nouveaux développements sont actuellement en cours en ce sens [Gaudin 02].

### 1.3.2.1 Présentation du modèle polycristallin

Le principe du modèle polycristallin est représenté sur la figure 1.20. On se donne un certain nombre de grains d'orientations cristallines différentes et choisies de telle sorte que le comportement plastique macroscopique soit le plus isotrope possible. Le nombre de grains a aussi une influence sur la continuité des surfaces seuil que l'on peut détecter avec ce modèle. Plus le nombre de grains retenu sera faible, plus les surfaces seuil détectées seront linéaires par morceaux. Les grains sont supposés équiaxes et l'élasticité est supposée isotrope et homogène dans chaque grain. De plus, la forme

et la position relative des grains les uns par rapport aux autres ne sont pas prises en compte.

Sur chacun des grains, la contrainte macroscopique  $\Sigma$  est localisée grâce à la loi :

$$\sigma_g = \Sigma + 2\mu(1 - \beta) [\mathbb{B} - \beta_g] \quad \text{avec} \quad \mathbb{B} = \sum_{g \in G} f_g \beta_g \quad (1.15)$$

où  $\sigma_g$  est le tenseur des contraintes dans le grain  $g$ ,  $\mu$  est le module de cisaillement du matériau,  $\beta$  est une constante dépendant du matériau<sup>8</sup>,  $f_g$  est la fraction volumique du grain  $g$  et  $\beta_g$  est une variable qui produit une accommodation non-linéaire des incompatibilités de déformations intergranulaires. Cette dernière variable évolue selon l'équation suivante :

$$\dot{\beta}_g = \dot{\varepsilon}_g^p - \Delta [\beta_g - \delta \varepsilon_g^p] \|\dot{\varepsilon}_g^p\| \quad (1.16)$$

avec  $\Delta$  et  $\delta$  deux paramètres dépendant du matériau.

Connaissant la contrainte dans chaque grain, le comportement du matériau est relié à la loi de Schmid qui suppose qu'un système cristallographique  $s$  est actif quand la contrainte de cisaillement  $\tau_s$  qui s'y exerce dépasse une valeur critique. La contrainte de cisaillement  $\tau_s$  sur chaque système de glissement s'exprime en fonction de la contrainte dans le grain  $\sigma_g$  par :

$$\tau_s = \sigma_g : \mathbb{M}_s \quad \text{avec} \quad M_{ijs} = \frac{1}{2} [n_{is} l_{js} + l_{is} n_{js}] \quad (1.17)$$

où  $\mathbb{M}_s$  est le tenseur qui caractérise l'orientation du système de glissement défini par le vecteur unitaire  $\underline{n}_s$  normal au plan de glissement, et par le vecteur unitaire  $\underline{l}_s$  qui donne la direction de glissement (Fig. 1.20).

L'écrouissage du matériau est alors introduit par l'intermédiaire de variables internes d'écrouissage cinématique  $X_s$  et isotrope  $R_s$ , comme dans les modèles macroscopiques. L'évolution des variables internes est calculée dans un cadre viscoplastique. Ce cadre d'analyse permet de s'affranchir des calculs coûteux liés à la condition de cohérence sur chaque système de glissement<sup>9</sup> et d'obtenir directement le taux de déformation viscoplastique en fonction du niveau de contrainte imposé :

$$\dot{\gamma}_s = \left\langle \frac{F_s}{K} \right\rangle^n \text{sign}(\tau_s - X_s) \quad (1.18)$$

$$\text{avec} \quad F_s = |\tau_s - X_s| - \tau_0 - R_s + \frac{1}{2} \frac{D}{C} X_s^2 \quad (1.19)$$

avec  $\tau_0$  la limite d'écoulement initiale des systèmes de glissement,  $D$  et  $C$  deux coefficients dépendant du matériau.  $\langle \cdot \rangle$  représente les crochets de McCauley ( $\langle u \rangle = u$  si

8.  $(1 - \beta) = \frac{7-5\nu}{15(1-\nu)}$  avec  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.

9. Dans un cadre élastoplastique, il faut vérifier si chaque système de glissement est actif ou non, c'est-à-dire si les conditions  $F_s = 0$  et  $\dot{F}_s = 0$  sont toutes les deux vérifiées. Or, comme tous les systèmes interagissent entre eux, ces conditions ne pourront être vérifiées que par itération, une activation nouvelle pouvant entraîner des désactivations ([Hihi *et al.* 84] dans [Cailletaud 87]).

$u > 0$ ,  $\langle u \rangle = 0$  sinon). Il est toutefois possible d'obtenir un comportement indépendant du temps en choisissant convenablement les paramètres de viscosité  $K$  et  $n$ <sup>10</sup>.

L'écroissage latent décrit dans la partie (1.2) est pris en compte dans la variable d'écroissage isotrope  $R_s$  via une matrice d'interaction  $\mathbb{H}$  :

$$R_s = Q \sum_{r \in S} H_{sr} q_r \quad \text{avec} \quad \dot{q}_r = b(1 - q_r) \dot{\gamma}_r \quad (1.20)$$

avec  $Q$  un coefficient matériau.

La matrice  $\mathbb{H}$  est ici de dimension (12,12) puisque l'acier inoxydable est un matériau de structure cubique face centrée qui comporte 12 systèmes de glissement. Elle peut s'écrire de la manière suivante :

$$(H_{sr}) = \begin{pmatrix} 1 & H & H & \dots & H & H \\ H & 1 & H & \dots & (L+H) & H \\ H & H & 1 & \dots & H & H \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ H & (L+H) & H & \dots & 1 & H \\ H & H & H & \dots & H & 1 \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

avec  $H$  et  $L$  deux coefficients matériau.

Le coefficient  $L$  a été introduit par Pilvin et Geyer [Pilvin et Geyer 97] pour prendre en compte l'interaction plus forte entre les systèmes qui forment des verrous de Lomer-Cottrell. La variable cinématique  $X_s$  qui permet de rendre compte des hétérogénéités intragranulaires suit une loi non-linéaire de type [Armstrong et Frederick 66] classique pour les modèles macroscopiques :

$$\dot{X}_s = C \dot{\gamma}_s - D X_s |\dot{\gamma}_s| \quad (1.22)$$

Enfin, une fois les équations de comportement résolues au niveau local, il faut "remonter" cette information au niveau macroscopique. Dans le cas des petites déformations et petites rotations, la déformation plastique d'un grain est obtenue par la connaissance de la scission moyenne sur chaque système :

$$\varepsilon_g^p = \sum_{s \in S} \mathbb{M}_s \gamma_s^p \quad (1.23)$$

La déformation plastique macroscopique est ensuite obtenue en faisant la moyenne des déformations plastiques dans chaque grain, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E}^p = \sum_{g \in G} f_g \varepsilon_g^p \quad (1.24)$$

Enfin, la contrainte macroscopique s'obtient par la loi de Hooke :

$$\Sigma = \sum_{g \in G} f_g \sigma_g = 2\mu \left\{ (\mathbb{E} - \mathbb{E}^p) + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\mathbb{E} - \mathbb{E}^p) \mathbb{I} \right\} \quad (1.25)$$

---

10. Par exemple  $K = 10$  MPa.  $s^{1/n}$  et  $n = 24$  [Cailletaud 87].

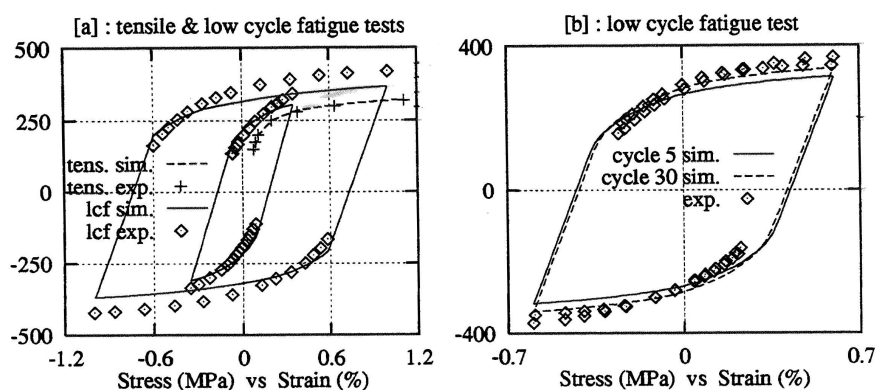


FIG. 1.21 – Identification du modèle polycristallin sur des essais d'écrouissage uniaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97]

### 1.3.2.2 Illustration des capacités du modèle polycristallin

Le modèle polycristallin tel qu'il a été présenté ici a été identifié par Pilvin et Geyer [Pilvin et Geyer 97] sur des résultats expérimentaux de traction monotone, écrouissage cyclique et rochet multiaxial d'un acier inoxydable de type 316 SPH [Delobelle *et al.* 95]. Les coefficients du modèle polycristallin sont reportés dans le tableau 1.2.

Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur
$\mu$	68,4 GPa	$\nu$	0,315	$\Delta$	353
$\delta$	0,171	$\tau_0$	61,6 MPa	$K$	$41,9 \text{ MPa.s}^{1/n}$
$n$	23	$C$	3650 MPa	$D$	46,9
$Q$	7,59 MPa	$b$	4,03	$H$	1,87
$L$	1,69				

TAB. 1.2 – Coefficients du modèle polycristallin identifiés sur des essais réalisés sur un acier inoxydable de type 316SPH, d'après [Pilvin et Geyer 97]

Les résultats d'identification reportés sur les figures 1.21, 1.22 et 1.23 illustrent bien la qualité du modèle<sup>11</sup>. Sur la figure 1.21(a) sont reportées à la fois l'identification du modèle sur un essai de traction et son identification sur des essais d'écrouissage cyclique uniaxial pour deux niveaux d'amplitude de chargement. Sur la figure 1.21(b) est reportée l'évolution de l'écrouissage au cours des cycles pour un niveau de chargement donné.

Les essais de rochet 1D reportés sur la figure 1.22 correspondent aux chargements suivants :

- r1\_1:  $\Delta\sigma/2 = 50 \text{ MPa}$  et  $\sigma_{\text{moy}} = 200; 250 \text{ MPa}$

11. Des versions légèrement différentes du modèle ont aussi été identifiées avec succès sur d'autres bases d'essais [Calloch 97], [Erieau *et al.* 00], [Frénois *et al.* 00].

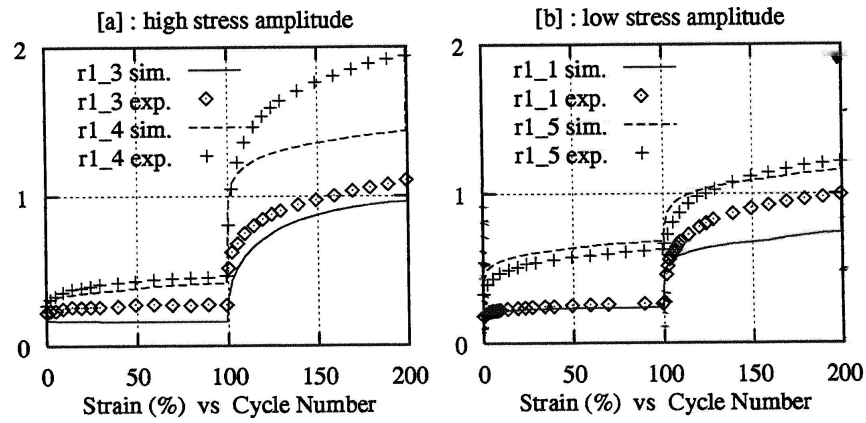


FIG. 1.22 – Identification du modèle polycristallin sur des essais de rochet uniaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97]

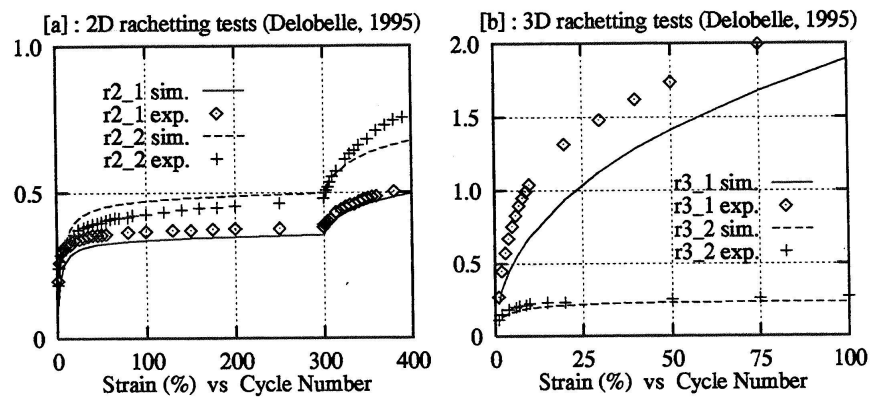


FIG. 1.23 – Identification du modèle polycristallin sur des essais de rochet multiaxiaux, d'après [Pilvin et Geyer 97]

- r1\_3:  $\Delta\sigma/2 = 245$  MPa et  $\sigma_{moy} = 0; 100$  MPa
- r1\_4:  $\Delta\sigma/2 = 180$  MPa et  $\sigma_{moy} = 100; 200$  MPa
- r1\_5:  $\Delta\sigma/2 = 120$  MPa et  $\sigma_{moy} = 100; 200$  MPa

Les essais de rochet 2D (Fig. 1.23a)) ont été réalisés sur des éprouvettes tubulaires et correspondent aux chargements suivants :

- r2\_1:  $\sigma_{ZZ} = 50$  MPa et  $\varepsilon_{\theta Z} = \pm 0.35\%; \pm 0.52\%$
- r2\_2:  $\sigma_{\theta\theta} = 50$  MPa et  $\varepsilon_{ZZ} = \pm 0.4\%; \pm 0.6\%$

Enfin, les deux essais de rochet 3D (Fig. 1.23b)) ont été réalisés sous une pression interne constante ( $\sigma_{\theta\theta} = 50$  MPa) et sous chargement secondaire cyclique sur les voies de traction - torsion. Dans l'essai r3\_1, le chargement secondaire est un chargement proportionnel :  $\varepsilon_{ZZ} = (2/\sqrt{3}) \varepsilon_{\theta Z} = 0.28\%$ , alors que dans l'essai r3\_2, le chargement secondaire est cette fois-ci non-proportionnel puisqu'il s'agit d'un trajet circulaire dans le plan  $(\varepsilon_{ZZ} - (2/\sqrt{3}) \varepsilon_{\theta Z})$  de rayon 0.4%.

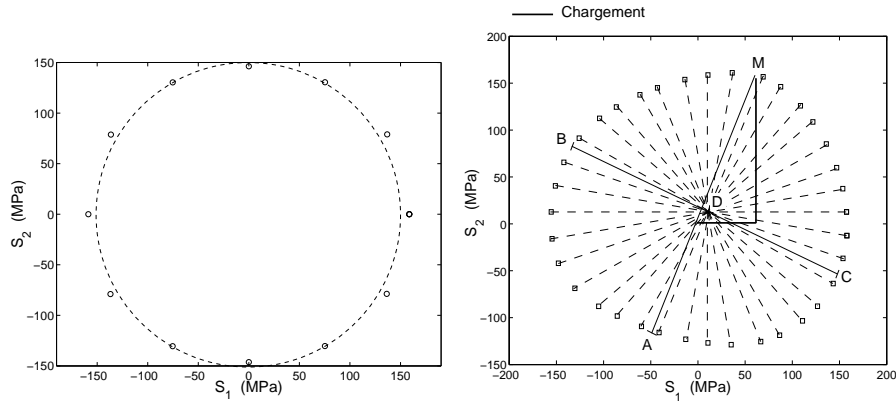
### 1.3.2.3 Bilan sur les capacités du modèle polycristallin et mise en place d'une procédure de détection de surfaces seuil numériques

Contrairement aux modèles macroscopiques décrits précédemment, le modèle polycristallin présenté ici est visiblement capable de décrire convenablement une large série d'essais comprenant notamment du rochet uniaxial et multiaxial. Mais cette qualité présente aussi un coût dont nous avons déjà parlé.

Par ailleurs, ce modèle prévoit aussi la distorsion du domaine d'élasticité et il est donc l'outil idéal pour tester des modèles macroscopiques qui s'appuieraient sur cette notion pour améliorer la description du rochet. Nous avons donc mis en place une procédure numérique de détection de surface seuil. La surface seuil est une notion macroscopique et n'est donc pas représentée par une variable particulière du modèle polycristallin. Cette surface de fin de régime purement élastique évolue selon l'état des variables internes microscopiques. Pour détecter une surface seuil, nous devons donc procéder de la même manière que pour un matériau réel. Nous simulons un trajet proportionnel depuis un point situé à l'intérieur du domaine d'élasticité, et nous détectons la surface seuil lorsqu'une quantité de déformation plastique, appelée "offset", s'est formée<sup>12</sup>. La surface seuil initiale du modèle polycristallin est représentée sur la figure 1.24(a). On observe une légère déviation par rapport au modèle théorique de von Mises représenté en pointillés. Cette différence reflète un comportement du modèle polycristallin qui est intermédiaire entre le critère de von Mises et celui de Tresca [Pilvin 90].

Contrairement aux détections de surface seuil sur matériau réel, nous ne sommes pas limités par le nombre de points détectés avec le modèle polycristallin puisque nous pouvons lancer chaque nouveau chargement radial depuis le même état des variables internes. Il n'y a donc pas d'accumulation de la déformation plastique à chaque point détecté. D'un point de vue pratique, nous commençons nos détections par une recherche approximative du "centre" de la surface seuil. Pour cela, nous réalisons une

12. Dans notre cas, nous avons choisi  $5 \cdot 10^{-5}$ .



(a) Surface seuil initiale du modèle polycristallin

(b) Stratégie de détection de surface seuil avec le modèle polycristallin

détection vers le point de contrainte nulle à partir du dernier point de chargement de coordonnées  $(S_{M1}, S_{M2})$ <sup>13</sup>. Nous obtenons le point A de coordonnées  $(S_{A1}, S_{A2})$  (voir Fig. 1.24(b)). Ensuite, nous détectons la surface perpendiculairement au vecteur  $\underline{AM}$  en partant du point milieu du segment  $[AM]$ . Nous obtenons les points B et C. La détection complète de la surface seuil part ensuite du point D milieu de  $[BC]$ .

13. Nous nous limitons au cas de détections biaxiales.



# Chapitre 2

## Distorsion du domaine d'élasticité : Mise en évidence expérimentale et modélisation

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Mise en évidence expérimentale</b>	<b>47</b>
2.1.1	Cas uniaxial - Choix d'une limite d'élasticité	47
2.1.2	Cas multiaxial	49
2.1.2.1	Choix d'un espace de représentation des résultats	49
2.1.2.2	Stratégies de détection en multiaxial	50
2.1.2.3	Mesures faites au laboratoire ; Particularités de l'acier inoxydable 316L	51
2.1.3	Normalité de l'écoulement plastique au domaine d'élasticité	55
2.1.4	Évolution de la distorsion des surfaces seuil au cours du chargement	55
2.1.4.1	Chargement uniaxial	55
2.1.4.2	Chargement multiaxial non-proportionnel	57
2.1.4.3	Trajet de rochet multiaxial "classique"	59
<b>2.2</b>	<b>Modélisation de la distorsion des surfaces seuil</b>	<b>59</b>
2.2.1	Introduction	59
2.2.2	Modèles à distorsion basés sur des tenseurs d'anisotropie d'ordre impair	63
2.2.2.1	Description d'une surface distordue	63
2.2.2.2	Équations d'évolution des variables de distorsion	69
2.2.3	Modèles à distorsion basés sur une description géométrique des surfaces seuil	71
2.2.3.1	Modèle de Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91]	72
2.2.3.2	Modèle de Ortiz et Popov [Ortiz et Popov 83]	73

2.2.3.3	Modèle de Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96] . . . . .	74
2.2.3.3.1	Équation de la surface seuil . . . . .	77
2.2.3.3.2	Équations d'évolution . . . . .	80
2.2.4	Bilan des modèles à distorsion . . . . .	84

---

## 2.1 Mise en évidence expérimentale

### 2.1.1 Cas uniaxial - Choix d'une limite d'élasticité

L'existence d'un domaine d'élasticité est une notion largement reconnue en mécanique des matériaux métalliques. Chacun se rappelle en effet la première analyse d'une courbe contrainte - déformation issue d'un essai de traction sur matériau métallique où l'on pouvait distinguer deux zones :

- la première où la réponse contrainte - déformation était linéaire, appelée “domaine d'élasticité”,
- la seconde où la réponse contrainte - déformation n'était plus linéaire, ce qui correspondait à la plasticité du métal. On mettait d'ailleurs en évidence cette plasticité par la déformation permanente que l'on obtenait après un retour à contrainte nulle.

La contrainte à partir de laquelle la plasticité apparaît, autrement dit la limite d'élasticité, est une notion subjective puisqu'elle dépend de l'échelle à laquelle on se place et parfois même de la problématique visée par l'identification de ce paramètre. Tout d'abord, d'un point de vue microscopique, la limite d'élasticité peut être définie comme la contrainte locale nécessaire pour faire glisser une dislocation. Cette définition pose un sérieux problème de mesure puisque, à ma connaissance, il n'existe pas de mesure continue de la contrainte locale<sup>1</sup> couplée à une observation elle aussi continue des dislocations.

Les dislocations peuvent par exemple être figées par irradiation à la fin d'un essai au niveau de la contrainte maximale atteinte et la contrainte locale être ensuite obtenue grâce à la courbure des dislocations observées au Microscope Électronique à Transmission (MET). Cette contrainte locale vaut en effet :

$$\tau_{loc} = \frac{T}{br} \quad (2.1)$$

où  $T$  est la tension de ligne de la dislocation,  $b$  la norme du vecteur de Burgers et  $r$  le rayon de courbure [Mughrabi 83]. Néanmoins, cette mesure est faite à un instant donné. Comment dans ce cas être sûr qu'un glissement de dislocation a eu lieu à ce niveau de contrainte?

La contrainte d'écoulement  $\tau_y$  sur un système de glissement est classiquement liée à la densité des dislocations  $\rho$  par la relation suivante :

$$\tau_y = \alpha \mu b \sqrt{\rho} \quad (2.2)$$

avec  $\alpha$  un coefficient compris entre 1/3 et 1/4 [François *et al.* 91] qui dépend des interactions entre systèmes de glissement [Franciosi *et al.* 80],  $\mu$  le module de cisaillement et  $b$  la norme du vecteur de Burgers. Toutefois, cette relation ne rend pas compte des

1. Il est nécessaire de connaître le niveau de contraintes local puisque même dans un monocristal, le champ de contraintes appliqué n'est pas homogène (à l'échelle des dislocations).

contraintes internes à longue distance qui font que la contrainte d'écoulement dépend du sens de sollicitation. On doit alors estimer l'hétérogénéité de la densité des dislocations pour pouvoir ensuite utiliser (par exemple) un modèle composite plus élaboré [Mughrabi 83], [Feaugas 99].

Si l'on se place à une échelle supérieure, à savoir l'échelle de quelques grains, on peut parler d'une contrainte "locale" responsable de l'apparition de microplasticité, c'est-à-dire d'une plasticité localisée dans quelques grains favorablement orientés ou dans des zones de concentrations de contraintes d'une pièce. Si le chargement se répète de manière cyclique, la plasticité et l'endommagement qui l'accompagne pourront augmenter jusqu'à amorcer une fissure dans la pièce et finalement provoquer sa rupture (phénomène de *fatigue*). La réponse macroscopique reste néanmoins linéaire, ce qui peut laisser à penser que le comportement du matériau est purement élastique. La contrainte macroscopique responsable de l'apparition de cette microplasticité (appelée *limite d'endurance*) est donc obtenue par identification inverse.

À l'échelle de l'éprouvette de laboratoire enfin, et c'est à cette échelle-ci que nous nous placerons, la limite d'élasticité est définie comme la contrainte pour laquelle la zone utile de l'éprouvette se plastifie. Cette limite d'élasticité correspond généralement à la perte de linéarité du comportement contrainte-déformation évoquée en début de chapitre. Malheureusement, cette transition entre régime linéaire élastique et régime non-linéaire plastique n'est presque jamais nettement marquée. On définit donc *a priori* une quantité de déformation plastique cumulée au delà de laquelle on est "sûr" d'être en plasticité. Cette quantité de déformation plastique, souvent appelée "offset" (voir Figure 2.1), sera d'autant plus petite que l'on cherchera à avoir une mesure "fine" de la limite d'élasticité. Typiquement, cette mesure est de l'ordre de  $10^{-5}$  en laboratoire et sous certaines précautions contre  $2 \cdot 10^{-3}$  pour les contrôles de qualité des matériaux [Lemaitre et Chaboche 88]. Dans la littérature, on relève des valeurs d'offset de  $10^{-6}$  [Phillips et Tang 72] mais les précautions à prendre pour départager la déformation plastique du bruit de mesure sont à mon avis pratiquement insurmontables. D'autre part, on considère que la limite d'élasticité est atteinte quand un certain nombre de points consécutifs ont dépassé la valeur de l'offset de déformation plastique [Wu et Yeh 91]. Ici, nous retenons 5 points (Fig. 2.1).

Enfin, de nombreux matériaux ont un comportement partiellement visqueux même à température ambiante, et c'est en particulier le cas de l'acier inoxydable 316L utilisé dans cette étude. La limite d'élasticité détectée est alors une fonction croissante de la vitesse de déformation imposée. Pour se prémunir de ce problème, chaque détection de la limite d'élasticité doit toujours être faite à une même vitesse de déformation, la plus faible possible. Certains auteurs préconisent même de réaliser les détectations par paliers, avec un temps d'attente entre chaque, de manière à laisser les effets visqueux (fluage ou relaxation selon que le pilotage est en contrainte ou en déformation) se dissiper. Une telle méthode peut donner lieu à des temps d'essai excessivement longs (de 3 heures [Wu et Yeh 91] à 1 jour [Phillips et Tang 72] pour une détection complète

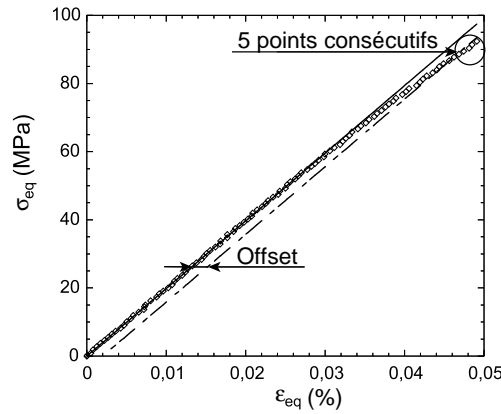


FIG. 2.1 – Définition de limite d'élasticité par la méthode de l'“offset”

de surface seuil).

### 2.1.2 Cas multiaxial

L'apparition de la plasticité peut être mise en évidence macroscopiquement pour tout chargement proportionnel, et quelle que soit sa direction, selon le même principe que précédemment. Cela permet d'obtenir un domaine d'élasticité fermé dans l'espace des déviateurs: la surface seuil. Pour détecter un point de la surface seuil, on calcule, au cours du trajet proportionnel de chargement, une contrainte équivalente  $\sigma_{eq}$ , généralement définie au sens de von Mises, et une déformation équivalente  $\epsilon_{eq}$ , également définie au sens de von Mises. Dans le régime élastique, on obtient donc un “module d'élasticité équivalent”  $E_{eq}$  obtenu par régression linéaire de la courbe expérimentale ( $\epsilon_{eq} - \sigma_{eq}$ ). Le point de la surface seuil est détecté lorsque la norme des déformation plastiques atteint la valeur de l'offset initialement choisie, c'est-à-dire lorsque :

$$\epsilon_{eq}^p = \epsilon_{eq} - \frac{\sigma_{eq}}{E_{eq}} \geq \text{Offset}.$$

#### 2.1.2.1 Choix d'un espace de représentation des résultats

Afin d'avoir une vision géométrique des chargements et du domaine d'élasticité, le choix est souvent fait de passer d'un espace de tenseurs à un espace de vecteurs. Tout déviateur peut être exprimé en fonction des 5 premiers “vecteurs” de la base orthonormée suivante [Ilyushin 63] :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\omega}}_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\omega}}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{\omega}}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\omega}}_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{\omega}}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\omega}}_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le dernier “vecteur”  $\underline{\underline{\omega}}_6$  permettant d’extraire la partie hydrostatique d’un tenseur (supposée inactive en plasticité). Par exemple, le tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  se décompose comme suit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^6 \left( \underline{\underline{\omega}}_i : \underline{\underline{\sigma}} \right) \underline{\underline{\omega}}_i = \sum_{i=1}^5 S_i \underline{\underline{\omega}}_i + H \underline{\underline{\omega}}_6 \quad (2.4)$$

ou, dans l’espace vectoriel des déviateurs :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sum_{i=1}^5 S_i \underline{\underline{\omega}}_i + H \underline{\underline{\omega}}_6 \quad (2.5)$$

avec  $S_i$  la  $i$ ème coordonnée du déviateur des contraintes dans “l’espace des déviateurs” (de dimension 5) et  $H$  la partie hydrostatique du tenseur des contraintes<sup>2</sup>. Dans l’espace vectoriel orthonormé des déviateurs, le domaine d’élasticité initial d’un matériau qui vérifie l’hypothèse d’isotropie plastique d’Ilyushin [Ilyushin 63] est alors une hypersphère (de von Mises) centrée sur l’origine des contraintes. En effet, selon cette hypothèse, la limite d’élasticité obtenue lors du tout premier chargement ne doit pas dépendre du chemin parcouru dans l’espace des déviateurs, ce qui permet de définir le domaine d’élasticité initial grâce à un seul paramètre, à une seule limite d’élasticité.

Tout chargement 2D (ex : éprouvette tubulaire soumise à un chargement de traction-torsion, traction-pression interne, éprouvette en croix soumise à un chargement de bi-traction,...) est alors décrit dans une coupe plane de cet espace de dimension 5 et l’intersection du domaine d’élasticité initial avec ce plan donne un domaine d’élasticité circulaire. De même, tout chargement 3D (ex : éprouvette tubulaire en traction - torsion - pression interne, éprouvette triaxiale soumise à un chargement de tri-traction / compression,...) est décrit dans une coupe par un hyperplan (de dimension 3) de cet espace et l’intersection du domaine d’élasticité initial avec cet hyperplan donne une sphère. On peut suivre ainsi le même raisonnement géométrique pour des chargements plus généraux où l’on pourrait solliciter les 5 composantes indépendantes du déviateur des contraintes.

Enfin, le même changement d’espace est appliqué aux déformations plastiques (déviatoriques) :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^5 \left( \underline{\underline{\omega}}_i : \underline{\underline{\varepsilon}}^p \right) \underline{\underline{\omega}}_i = \sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^p \underline{\underline{\omega}}_i \quad \text{ou} \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^5 \varepsilon_i^p \underline{\underline{\omega}}_i \quad (2.6)$$

### 2.1.2.2 Stratégies de détection en multiaxial

Si l’on souhaite connaître l’évolution du domaine d’élasticité au cours d’un chargement non proportionnel, il est nécessaire de détecter ce domaine en plusieurs points.

2. Les 5 premiers vecteurs  $\underline{\underline{\omega}}_i$  ont alors les coordonnées suivantes dans l’espace vectoriel des déviateurs :  $\underline{\underline{\omega}}_1 = (1,0,0,0,0)$ ,  $\underline{\underline{\omega}}_2 = (0,1,0,0,0)$ , ...,  $\underline{\underline{\omega}}_5 = (0,0,0,0,1)$ .

D'autre part, de nombreux expérimentateurs ont testé leur méthode de détection de limite d'élasticité pour des chargements 2D, sur le cas particulier d'un matériau supposé vierge. Il s'agissait de vérifier la circularité du domaine et, si tel n'était pas le cas, de remettre en cause l'hypothèse d'isotropie plastique. Dans la plupart des cas où cette hypothèse n'était pas validée, cela était dû :

- soit au fait que le matériau était sensible au troisième invariant des contraintes [Pilvin 90], ce qui donne un domaine d'élasticité intermédiaire entre celui décrit par le modèle de von Mises et celui décrit par le modèle de Tresca,
- soit au fait qu'il existait une anisotropie résiduelle due à la mise en forme des éprouvettes (notamment pour des éprouvettes planes obtenues par laminage).

Ainsi, pour vérifier l'isotropie plastique d'un matériau ou pour connaître l'évolution d'un domaine d'élasticité au cours d'un chargement quelconque, il est nécessaire de détecter la limite d'élasticité en plusieurs points et donc de définir une stratégie de détection.

En effet, la petite déformation plastique (offset) nécessaire à la détection de chaque point du domaine d'élasticité ne permet pas toujours de considérer que le matériau reste dans le même état lors de toutes les détections des points du domaine d'élasticité. Plusieurs auteurs [Rousset 85], [Helling *et al.* 86], [Khan et Wang 93] ont montré que pour un offset "fort", de l'ordre de  $10^{-3}$ , on obtient une forme elliptique quelle que soit l'histoire de prédéformation de l'éprouvette alors que pour un "faible" offset, de l'ordre de  $10^{-5}$ , on garde l'effet d'histoire. Ce dernier s'exprime par un domaine d'élasticité distordu, avec une pointe dans la direction de la prédéformation plastique et un plat dans la direction opposée [Phillips et Tang 72], [Ikegami 82], [Eisenberg et Yen 84], [Rousset 85], [Helling *et al.* 86], [Wu et Yeh 91]. Les domaines d'élasticité obtenus suite à un chargement uniaxial ont ainsi une forme d'"œuf" caractéristique (voir Figure 2.2). D'autre part, l'ordre dans lequel est réalisée la détection a lui aussi une importance. La déformation plastique nécessaire à la détection peut en effet alimenter un écrouissage à caractère isotrope (gonflement du domaine d'élasticité) mais aussi cinématique. L'écrouissage cinématique translate le domaine d'élasticité globalement dans la direction de l'incrément de contrainte, c'est-à-dire dans la direction de détection. Pour éviter "d'emmener" le domaine d'élasticité toujours dans la même direction, on a donc tout intérêt à alterner, autant que faire se peut, les directions de détections. On pourra alors supposer que le domaine d'élasticité ne s'est pas déplacé, au cours de la détection et du fait de la détection. En ce qui nous concerne, nous avons fait le choix chronologique représenté sur la figure 2.3.

### 2.1.2.3 Mesures faites au laboratoire ; Particularités de l'acier inoxydable 316L

Pour la plupart des matériaux métalliques, on peut considérer que le comportement élastique est linéaire et que l'entrée en plasticité se caractérise par la perte de cette linéarité. Dès lors, il sera d'autant plus aisé de repérer l'entrée en plasticité d'un matériau que la "rupture de pente" entre les deux régimes sera significative (fort module d'élasticité et faible module d'écrouissage) comme cela est le cas pour de nombreux

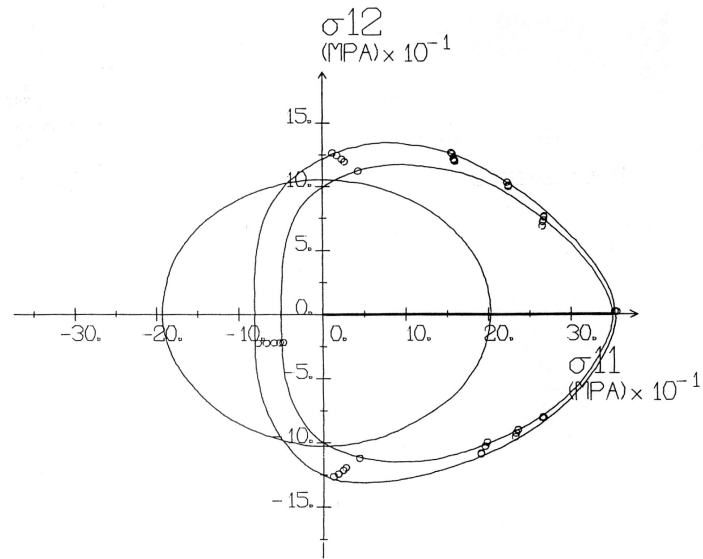


FIG. 2.2 – *Détection de surfaces seuil après un essai de traction sur un alliage d'aluminium, d'après Rousset [Rousset 85]. L'ellipse représente le domaine d'élasticité initiale.*

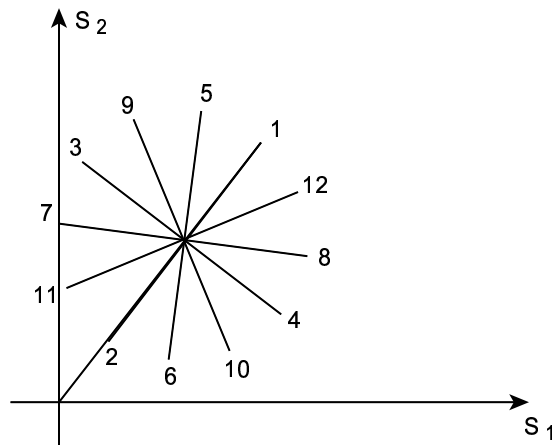


FIG. 2.3 – *Stratégie de détection des points de la surface seuil*



aciers doux par exemple.

L'acier inoxydable 316L qui a fait l'objet de nombreuses études au laboratoire [Marquis 79], [Benallal 89], [Marquis 89], [Calloch 97], [Portier 99], [Kaszinski 99] n'entre malheureusement pas dans cette catégorie de matériaux "sympathiques". Il possède un très fort module d'écroutissage à l'entrée en plasticité et il est de plus visqueux à température ambiante [Delobelle *et al.* 95]. La perte de linéarité du comportement a donc lieu pour une contrainte supérieure à la "vraie" limite d'élasticité, cette augmentation apparente de la limite d'élasticité étant d'autant plus importante que la vitesse de sollicitation imposée est élevée. Nous nous prémunissons contre cet effet en effectuant toutes nos détections de surfaces seuil à une vitesse de déformation identique et relativement faible, à savoir  $\dot{\epsilon}^{eq} = 2,5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ . D'autre part, nous prenons un offset le plus faible possible étant donnée la résolution de notre extensomètre biaxial :  $\epsilon_{offset}^p = 2 \cdot 10^{-5}$ . Enfin, nous filtrons les signaux d'acquisition pour éliminer les bruits haute fréquence. Nous reportons sur la figure 2.4 deux mesures de la déformation plastique au cours de détections où ces précautions ont été prises, une première où tout se passe bien, et une seconde où les perturbations sont trop importantes pour permettre la détermination de la direction de l'écoulement plastique (perturbations dues à l'utilisation d'autres machines dans le centre d'essais par exemple).

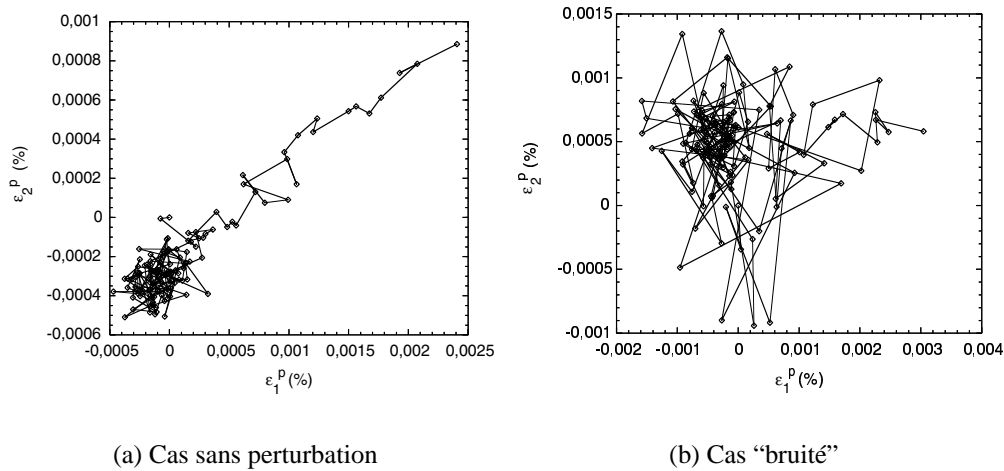


FIG. 2.4 – Évolution de la déformation plastique lors d'une détection de surfaces seuil

Ces précautions n'ont pas été suffisantes. En effet, nous avons réalisé deux détections d'une même surface seuil à partir de deux positions de rayonnement - centres de détection - différentes. La deuxième surface seuil obtenue était alors décalée par rapport à la première dans la même direction que le décalage entre les deux centres de détection. Pour ce matériau, il apparaît donc que la position d'une surface seuil détectée dépend fortement de la position du centre de détection choisi. Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que le comportement "élastique" (ou considéré ici comme tel) n'est pas ri-

goureusement linéaire. En fait, plus on se rapproche de la limite d'élasticité, plus le "module d'élasticité" diminue, ce qui peut s'apparenter à de la viscosité. Néanmoins, nous avons toujours rencontré ce phénomène quelle que soit la vitesse de sollicitation utilisée entre  $2 \cdot 10^{-6} s^{-1}$  et  $2 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ . Pour un centre de détection décalé par rapport au centre "réel" de la surface seuil, nous avons ainsi rencontré une différence de 10 GPa entre le module d'élasticité mesuré en direction de la portion de surface seuil la plus proche du centre de détection et celui mesuré dans la direction opposée<sup>3</sup>. Nous avons donc soigné la recherche du centre de détection de la surface seuil de manière à limiter ce dernier phénomène. À partir du point de chargement A (voir Fig 2.5) où l'on souhaite détecter une surface seuil, nous inversons le sens de chargement jusqu'à détecter la "surface seuil" en B. *A priori*, ce dernier point est assez loin de la véritable surface seuil puisque le module d'élasticité utilisé pour sa détection a été surestimé en partant d'un point appartenant à la surface seuil. Cela justifie de mener une nouvelle détection en prenant cette fois-ci comme point de départ pour l'estimation du module d'élasticité le point  $C_1$  milieu du segment  $[AB]$ . Nous effectuons une recherche dans les deux sens pour estimer le nouveau centre de détection  $C_2$  (point milieu de  $[A_1B_1]$ ). Ensuite, nous recherchons la surface seuil dans une direction perpendiculaire à la précédente, dans les deux sens, à partir de  $C_2$ . Nous obtenons le centre  $C_3$  (milieu de  $[E_2D_2]$ ) à partir duquel nous recommençons une nouvelle fois cette dernière opération. Nous obtenons le point  $C_4$  (milieu de  $[E_3D_3]$ ) que nous choisissons comme point de rayonnement pour la détection complète de la surface (point C). Cette stratégie n'est évidemment pas optimale mais elle a au moins le mérite d'éloigner le centre de détection du bord de la surface seuil dans la plupart des cas de chargement rencontrés.

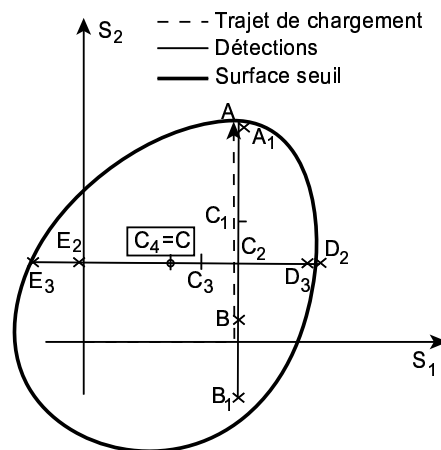


FIG. 2.5 – Stratégie de recherche du centre de détection d'une surface seuil

Xavier Fayolle, assistant ingénieur au laboratoire, a développé, sous le logiciel Lab-view, tout le programme que nous avons utilisé pour la détection de surfaces seuil. Ce programme, très convivial, permet de régler les différents paramètres de la détection,

3. Le centre de détection était à plus de 60 MPa du bord de la surface seuil détectée.

à savoir :

- Le trajet de chargement et les instants de recherche des surfaces seuil,
- La recherche “du” centre de la surface seuil,
- Les angles de recherche de la limite d’élasticité à partir “du” centre de la surface seuil,
- La vitesse de déformation lors des trajets de détection :  $2,5 \cdot 10^{-5} s^{-1}$ ,
- La vitesse d’acquisition : 10 points par seconde,
- Pour filtrer le bruit de mesure, le nombre de points d’acquisition nécessaire pour construire un point moyen : 10,
- L’offset de déformation plastique :  $2 \cdot 10^{-5}$ ,
- Le nombre de points consécutifs qui doivent dépasser l’offset pour valider la détection : 5,
- Les caractéristiques géométriques de l’éprouvette testée ainsi que les gains des différentes voies d’acquisition pour tracer en direct la courbe  $(\epsilon_{eq} - \sigma_{eq})$  (Fig. 2.1).

### 2.1.3 Normalité de l’écoulement plastique au domaine d’élasticité

La question de la normalité de l’écoulement plastique au domaine d’élasticité est primordiale puisque nombreux sont les modèles de plasticité qui s’appuient sur cette hypothèse.

Il n’est cependant pas évident de répondre catégoriquement à cette question compte tenu des erreurs de mesure commises lors de la détection du domaine d’élasticité. La quantité de déformation plastique générée est en effet extrêmement faible, et de plus, rien ne dit que cette déformation se fasse selon une direction fixe. Néanmoins, aux erreurs de mesure près, la plupart des auteurs qui ont réalisé des détections de surface seuil ont vérifié que l’écoulement plastique était bien normal au domaine d’élasticité ([Phillips et Tang 72], [Rousset 85], [Khan et Wang 93] par exemple).

### 2.1.4 Évolution de la distorsion des surfaces seuil au cours du chargement

#### 2.1.4.1 Chargement uniaxial

La distorsion apparaît dès que l’on plastifie l’éprouvette mais elle peut ensuite se saturer alors que l’écrouissage cinématique continue à évoluer [Rousset 85], [Wu et Yeh 91]. Lors d’un essai de traction, la taille du domaine d’élasticité semble diminuer pour de faibles déformations plastiques, puis augmenter pour de plus grandes quantités de déformation plastique [Ikegami 82], [Gaudin et Feaugas 99].

La direction de la distorsion suit celle prise par le dernier chargement plastique “conséquent” (d’où la nécessité de choisir un offset de détection le plus faible possible). On peut vérifier par exemple ce résultat lors d’un trajet en retour suite à un trajet uniaxial.

En effet, la pointe et le plat obtenus lors de la précharge disparaissent dès que la matière est plastifiée en sens inverse et une nouvelle distorsion apparaît à l'opposé de la précédente pendant que le domaine d'élasticité revient sur ses pas [Stout *et al.* 85], [Helling et Miller 87] (voir Fig. 2.6).

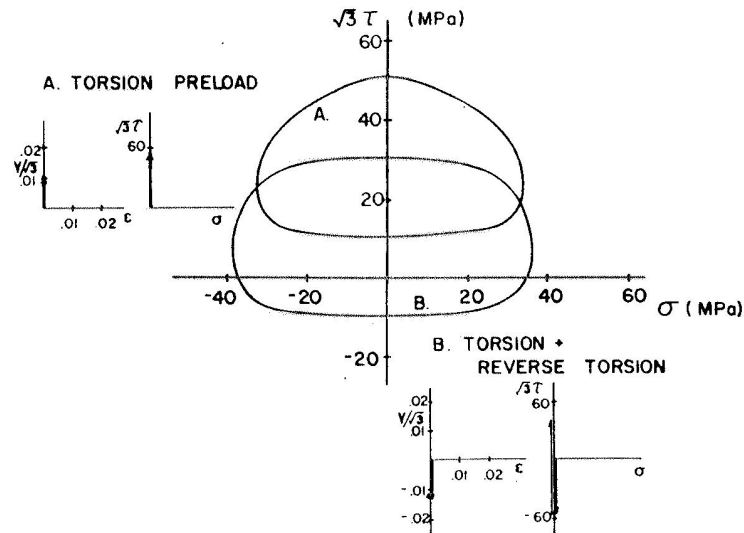


FIG. 2.6 – Surfaces seuil A obtenue après une précharge en torsion ( $\tau > 0$ ) et B, obtenue après une décharge de 0,5% de déformation plastique suite à une précharge en torsion de sens opposé à A ( $\tau < 0$ ), d'après [Stout *et al.* 85]

Cette observation nous permet de suggérer l'hypothèse que la distorsion du domaine d'élasticité est une représentation macroscopique des phénomènes microscopiques qui se manifestent en premier lors de la plastification d'un métal. Stout *et al.* [Stout *et al.* 85] proposent que la distorsion des surfaces seuil observée sur leur alliage d'aluminium soit liée à la structure de dislocations en cellules qui était présente dans leurs échantillons. Cependant, d'après une étude [Feaugas 99] faite sur l'acier inoxydable 316L, les structures cellulaires de dislocations n'apparaissent que tardivement lors d'un essai de traction, du fait de la faible énergie de défaut d'empilement du matériau. Wu et Yeh [Wu et Yeh 91] ont réalisé des détections de surface seuil sur un acier inoxydable 304L dont il est probable que les structures cellulaires de dislocations se forment elles aussi après une quantité importante de déformation plastique (de l'ordre du %). Or ces auteurs ont observé une distorsion franche dès 0,2% de déformation plastique en traction (Fig. 2.7), ce qui est incompatible avec l'idée d'un rôle exclusif des cellules de dislocations et contredit l'hypothèse de Stout *et al.* [Stout *et al.* 85].

On peut supposer que l'anisotropie plastique décrite par la distorsion du domaine d'élasticité au niveau macroscopique est plutôt le fruit, au niveau microscopique, de tout écoulement plastique dans des directions privilégiées. À ce titre, les incompatibilités de déformations intergranulaires jouent un rôle important et, pour un niveau de déformation élevé, toutes les structures de dislocations ou presque peuvent rendre

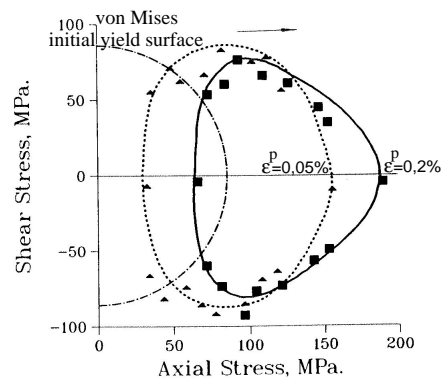


FIG. 2.7 – Surfaces seuil obtenues après une prédéformation en traction de 0,2% sur un acier inoxydable 304L, d’après [Wu et Yeh 91]

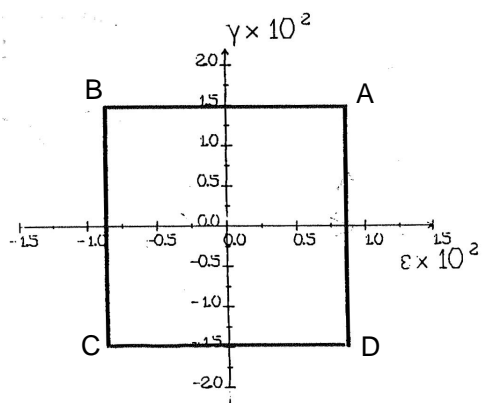
compte de cet effet, y compris les structures cellulaires, bien que ces dernières soient relativement “isotropes”. En effet, les cellules de dislocations sont sensibles au sens de chargement puisqu’elles peuvent être partiellement détruites par un chargement en sens inverse de celui qui les a créées [Gaudin et Feaugas 99]. Enfin, d’après Rousset [Rousset 85] et Wu et Yeh [Wu et Yeh 91], lors de chargements cyclique, la distorsion des surfaces seuil reste inchangée au cours des cycles. L’écrouissage cyclique est selon ces auteurs principalement isotrope ou cinématique selon le matériau étudié, Aluminium ou acier inoxydable 304L respectivement.

#### 2.1.4.2 Chargement multiaxial non-proportionnel

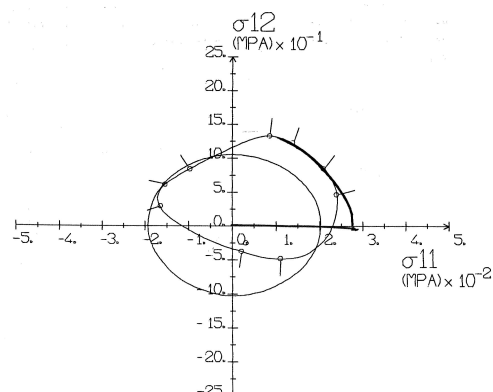
Suite à un chargement non-proportionnel, la forme des surfaces seuil peut devenir assez complexe puisque la direction de chargement, et par conséquent la direction de distorsion, évolue. Pour des trajets où le matériau est plastifié en permanence, comme les trajets circulaires ou carrés par exemple (Fig. 2.8), la direction de la distorsion tourne en suivant le point de chargement avec un éventuel retard, d’où l’expression “rotation des surfaces seuil”. Pour des trajets qui passent par l’intérieur du domaine d’élasticité, les formes peuvent devenir très complexes puisqu’elles respectent *a priori* les observations expérimentales suivantes :

- une bosse et un plat se forment sur la surface seuil au point de chargement actuel et à l’opposé de celui-ci respectivement,
- la surface seuil reste convexe,
- l’effet d’une précédente distorsion ne s’estompe pas de manière instantanée.

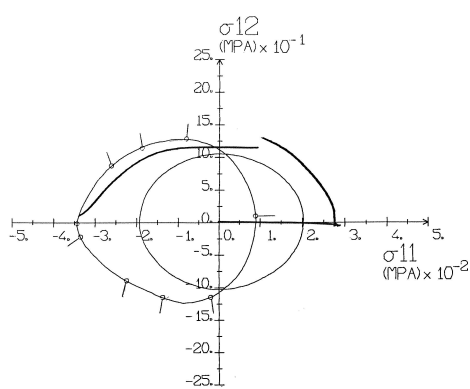
On peut alors imaginer des trajets qui touchent le domaine d’élasticité dans des directions successives très différentes pour obtenir la forme du domaine d’élasticité la plus anisotrope. On peut supposer qu’il s’agisse par exemple des mêmes trajets que les trajets les plus durcissants (surécrouissage) obtenus par une simulation micro-macro



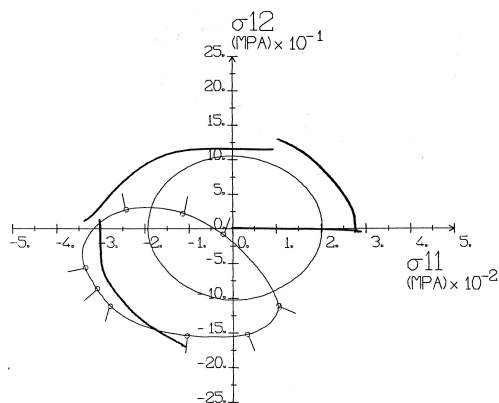
(a) Trajet de chargement carré



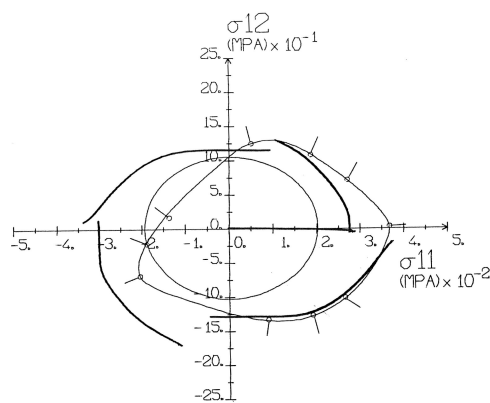
(b) Réponse en contraintes et détection de la surface seuil en A



(c) Réponse en contraintes et détection de la surface seuil en B



(d) Réponse en contraintes et détection de la surface seuil en C



(e) Réponse en contraintes et détection de la surface seuil en D

FIG. 2.8 – Détection de surfaces seuil suite à un trajet carré non-proportionnel sur un alliage d'Aluminium AU4G, d'après [Rousset 85]. Les flèches représentent les directions d'écoulement plastique.

[Cailletaud 87] qui consistait à solliciter l'une après l'autre chaque composante du tenseur des déformations.

Enfin, lors de trajets cycliques, la distorsion du domaine d'élasticité obtenue dans le premier cycle ne semble pas être modifiée par les cycles suivants [Rousset 85].

### 2.1.4.3 Trajet de rochet multiaxial "classique"

Nous avons réalisé des essais de rochet 2D classiques de traction-torsion, où la contrainte axiale est maintenue constante (non nulle) et où la déformation de cisaillement évolue de manière cyclique. Deux niveaux de chargement cyclique ont été testés,  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$  et  $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$ . Les détections initiales et les surfaces obtenues aux maxima du premier cycle sont reportées sur la figure 2.9<sup>4</sup>. Les symboles représentent le lieu des points où la limite d'élasticité a été détectée et les flèches représentent les directions d'écoulement plastique. On peut remarquer que l'isotropie plastique initiale et la normalité de l'écoulement au domaine d'élasticité sont assez bien vérifiées. La distorsion du domaine d'élasticité est légère pour le chargement de faible amplitude et plus prononcée pour le trajet à "forte" amplitude. Elle se caractérise par une réduction de la taille du domaine d'élasticité dans la direction de chargement et, surtout, par une pointe au point de chargement et un plat dans la direction opposée. On remarque qu'au point de chargement, l'écoulement plastique est orienté principalement selon la direction de cisaillement alors que le domaine d'élasticité n'est pas centré sur la contrainte axiale moyenne. Nous confirmons ainsi expérimentalement l'hypothèse faite par plusieurs auteurs [Bari et Hassan 00], [Portier *et al.* 00], [Bari et Hassan 02], selon laquelle la distorsion du domaine d'élasticité, si elle est bien modélisée, peut améliorer les modèles phénoménologiques qui surestiment le rochet multiaxial en agissant sur la direction de l'écoulement plastique.

## 2.2 Modélisation de la distorsion des surfaces seuil

### 2.2.1 Introduction

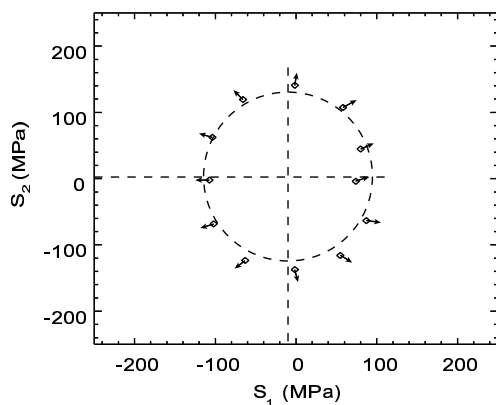
Dans le cadre classique de la plasticité des matériaux métalliques isotropes, le domaine d'élasticité est généralement représenté par le critère de von Mises, qui s'écrit :

$$F = J_2(\sigma^D) - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.7)$$

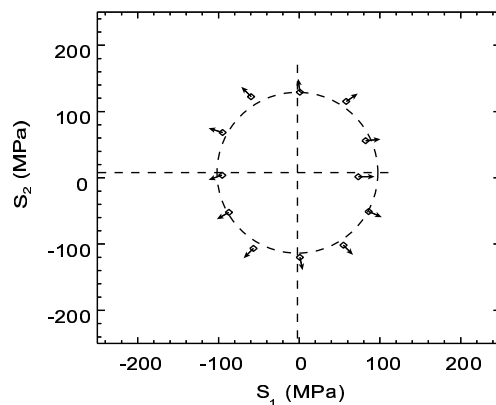
avec  $\sigma_Y$  la limite d'élasticité initiale du matériau et  $J_2(\sigma^D)$  le second invariant du déviateur des contraintes défini classiquement par :

$$J_2(\sigma^D) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D} = \sqrt{\frac{3}{2} \text{Tr}(\sigma^{DT} \sigma^D)} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ij}^D} \quad (2.8)$$

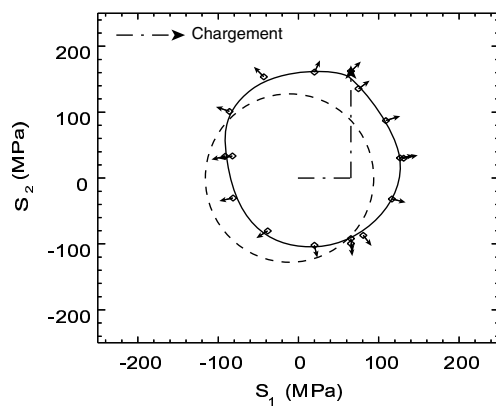
4. Malheureusement, je n'ai pas pu, par maladresse, renouveler ces détections à la fin des cycles.



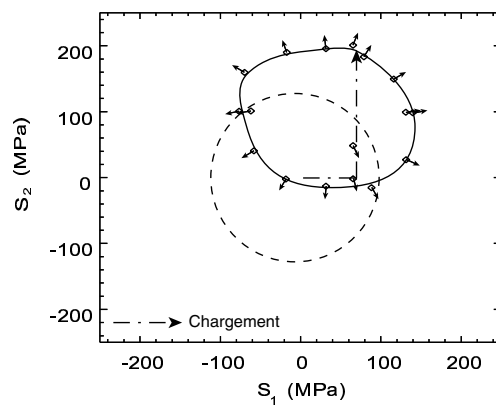
(a) Détection initiale de surface seuil pour l'essai à  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$



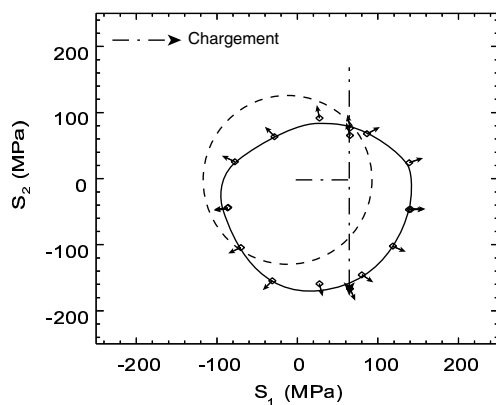
(b) Détection initiale de surface seuil pour l'essai à  $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$



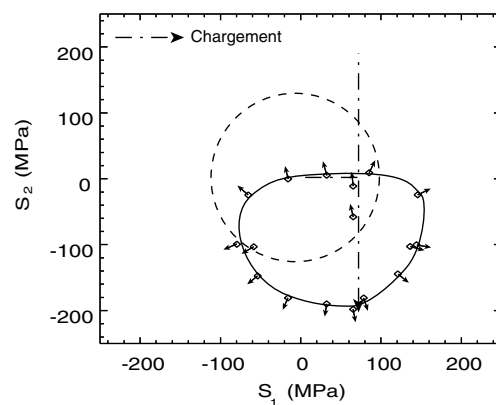
(c) Détection lors du premier cycle à  $\varepsilon_{12} = 0,1\%$



(d) Détection lors du premier cycle à  $\varepsilon_{12} = 0,2\%$



(e) Détection lors du premier cycle à  $\varepsilon_{12} = -0,1\%$



(f) Détection lors du premier cycle à  $\varepsilon_{12} = -0,2\%$

FIG. 2.9 – Détection de surfaces seuil au cours d'un trajet de Rochet 2D sur un acier inoxydable 316L



Le facteur  $3/2$  est introduit pour que, dans un essai de traction simple, le second invariant soit directement égal à la contrainte de traction. Ce modèle suppose que la plasticité du matériau soit insensible au premier invariant des contraintes (pression hydrostatique) mais aussi au troisième invariant des contraintes :

$$J_3(\sigma^D) = \left( \frac{9}{2} \sigma_{ij}^D \sigma_{ki}^D \sigma_{kj}^D \right)^{1/3} \quad (2.9)$$

où le facteur  $9/2$  est introduit pour la même raison que précédemment. La première hypothèse est vérifiée pour la plupart des métaux, mais il n'en est pas toujours de même pour la seconde. Certains matériaux sont en effet moins proches du critère de von Mises que de celui de Tresca qui s'écrit :

$$F = \text{Sup}_{(i,j)} |\sigma_i - \sigma_j| - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.10)$$

avec  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  les contraintes principales.

Dans la plupart des cas, les matériaux métalliques ont un comportement qui se situe entre ces deux modèles, ce qui peut être pris en compte de la manière suivante ([Nayak et Zienkiewicz 72] dans [Pilvin 90])<sup>5</sup> :

$$F = \left\{ a + (1-a) \left( \frac{4}{3} \right)^{1/2} \cos \theta \right\} J_2 - \sigma_Y \leq 0 \quad (2.11)$$

avec  $\theta = -(1/3) \text{Arcsin} \left( \left[ \frac{J_2}{J_3} \right]^3 \right)$  et  $a$  un nouveau paramètre dépendant du matériau.

Pour  $a = 1$ , on retrouve le critère de von Mises et pour  $a = 0$ , on obtient le critère de Tresca. L'identification de ce paramètre peut se faire par exemple grâce à un essai de traction-torsion proportionnel où  $\sigma_{11} = \tau_{12}$ , en comparant les déformations plastiques  $\epsilon_{22}^p$  et  $\epsilon_{33}^p$  [Pilvin 90]. La réponse du matériau se situera alors entre celle prédite par le critère de von Mises,  $\epsilon_{22}^p = \epsilon_{33}^p$ , et celle prédite par le critère de Tresca,  $\epsilon_{22}^p = -\epsilon_{11}^p$  et  $\epsilon_{33}^p = 0$ . Toutefois, ce type de raffinement de la modélisation est loin d'être utilisé massivement dans la littérature, et l'on se contente souvent du modèle de von Mises, facile d'emploi dans les calculs numériques. Le critère de Tresca est quant à lui plus délicat d'utilisation en raison des discontinuités de normale à la surface, visibles notamment dans le plan  $(\sigma_{11}; \sigma_{12})$ . Ces discontinuités se traduisent alors par une incertitude sur la direction de l'écoulement plastique [Lemaitre et Chaboche 88].

Dans l'espace des déviateurs introduit dans la partie (2.1.2.1), le modèle de von Mises s'écrit :

$$F = ||\underline{S}|| - S_0 = \sqrt{S_i S_i} - S_0 \leq 0 \quad (2.12)$$

et représente une hypersphère qui traduit l'hypothèse d'isotropie plastique [Ilyushin 63] selon laquelle tout trajet de chargement proportionnel dans cet espace conduit à la

5. Voir aussi le modèle d'Edelman et Drucker dans [Lemaitre et Chaboche 88].

même limite d'élasticité initiale  $S_0$ <sup>6</sup>.

Si le niveau de chargement dépasse la limite d'élasticité du matériau, il y a alors plasticité du métal, et par voie de conséquence écrouissage. On considère classiquement que l'écrouissage est soit cinématique - translation du domaine d'élasticité - soit isotrope - augmentation de la taille du domaine d'élasticité. Ces deux écrouissages sont introduits dans le modèle de von Mises de la façon suivante :

$$F = \|\underline{S} - \underline{X}\| - S_0 - \Delta R = \sqrt{(S_i - X_i)(S_i - X_i)} - S_0 - \Delta R \leq 0 \quad (2.13)$$

avec  $\underline{X}$  l'écrouissage cinématique et  $\Delta R$  l'écrouissage isotrope. Dans la suite, nous appellerons  $R$  la taille du domaine d'élasticité, telle que  $R = S_0 + \Delta R$ , et  $\underline{S}'$  le vecteur  $\underline{S} - \underline{X}$ .

Les observations expérimentales de surface seuil (voir partie (2.1.4)) prouvent qu'en plus d'une translation et d'une expansion, le domaine d'élasticité se distord sous l'effet de la déformation plastique. Le modèle de von Mises n'est alors plus adapté pour représenter ce phénomène, mais il reste néanmoins pertinent en ce qui concerne l'état initial du matériau. De fait, les modèles conçus pour représenter les distorsions du domaine d'élasticité sont souvent une généralisation du modèle de von Mises. Par exemple, le critère anisotrope de Hill [Hill 50] s'écrit<sup>7</sup> :

$$F = \sqrt{M_{ij}S'_iS'_j} - R \leq 0 \quad (2.14)$$

avec  $M_{ij}$  une matrice d'anisotropie. Si  $M_{ij}$  est la matrice identité, on retrouve le modèle de von Mises. L'écriture quadratique en  $\underline{S}'$  de l'équation (2.14) génère un domaine d'élasticité de forme ellipsoïdale, symétrique par rapport au centre du domaine d'élasticité, ce qui n'est pas le cas des domaines d'élasticité distordus<sup>8</sup> (voir Fig. (2.2) par exemple). Certains auteurs ont toutefois tenté de décrire partiellement la distorsion du domaine d'élasticité en faisant dépendre les coefficients de la matrice  $M_{ij}$  du chargement [Helling et Miller 87].

Nous pouvons déduire de cette observation que la distorsion (dissymétrie) du domaine d'élasticité doit nécessairement faire intervenir des termes non-quadratiques de l'état des contraintes dans l'écriture de la fonction seuil. Deux stratégies principales ont alors

6.  $S_0 = \sqrt{2/3} \sigma_y$ , avec  $\sigma_y$  la limite d'élasticité en traction du matériau étant donné la base choisie en (2.3).

7. Le modèle de Hill est plus connu sous la forme suivante :

$$f = \sqrt{F(\sigma'_{11}{}^2 - \sigma'_{22}{}^2) + G(\sigma'_{22}{}^2 - \sigma'_{33}{}^2) + H(\sigma'_{33}{}^2 - \sigma'_{11}{}^2) + 2L\sigma'_{12}{}^2 + 2M\sigma'_{23}{}^2 + 2N\sigma'_{31}{}^2} - R' \leq 0$$

avec  $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - X_{ij}$ ,  $R' = \sqrt{3/2}R$  et  $F, G, H, L, M$  et  $N$  des coefficients matériau.

8. L'équation (2.14) convient cependant parfaitement pour les domaines initiaux de matériaux orthotropes, comme les tôles laminées par exemple.

été suivies dans la littérature. La première consiste à modifier la fonction seuil par des termes non quadratiques grâce :

- au troisième invariant des contraintes [Gupta et Meyers 92] ou plus généralement à des tenseurs d'anisotropie d'ordre impair [Harvey *et al.* 83], [Rees 83] :

$$F = F_{mises} + C_{ijk} \frac{S'_i S'_j S'_k}{S'_l S'_l} \leq 0 \quad (2.15)$$

- à une modification “orientée” de la contrainte, dont la norme est ensuite utilisée pour définir la surface seuil [Phillips 73], [Rousset 85], [François 01] :

$$F = F_{mises} (\underline{S}' - \underline{D}) = \|\underline{S}' - \underline{D}\| - R \leq 0 \quad (2.16)$$

avec  $\underline{D}$  un vecteur responsable de la distorsion.

La seconde stratégie consiste à utiliser des formulations purement géométriques, soit en reprenant certaines propriétés des surfaces polaires ([Kurtyka et Życzkowski 85], [Ortiz et Popov 83]), soit en s'attachant à représenter finement les transformations locales du domaine d'élasticité observées expérimentalement [Boucher et Cordebois 91]. Nous pouvons d'ores et déjà préciser que la plupart des auteurs ont montré la capacité de leur modèle à décrire quelques surfaces seuil expérimentales, mais qu'aucun d'entre eux n'a, à ma connaissance, proposé et identifié des lois de comportement permettant de décrire quantitativement à la fois l'évolution du domaine d'élasticité et les courbes de comportement  $(\varepsilon - \sigma)$  pour des trajets multiaxiaux variés.

## 2.2.2 Modèles à distorsion basés sur des tenseurs d'anisotropie d'ordre impair

Nous décrivons tout d'abord les formes que certains auteurs ont pu obtenir par ce type d'approche avant de présenter quelques lois d'évolution des variables décrivant la distorsion.

### 2.2.2.1 Description d'une surface distordue

Le modèle de von Mises peut se généraliser comme suit [Rees 83] :

$$F = C_i S'_i + \sqrt{C_{ij} S'_i S'_j} + \frac{C_{ijk} S'_i S'_j S'_k}{S'_l S'_l} - R \leq 0 \quad (2.17)$$

avec  $C_i$ ,  $C_{ij}$  et  $C_{ijk}$  des paramètres dépendant du matériau et écrits respectivement sous la forme d'un vecteur, d'un tenseur du deuxième ordre et d'un tenseur du troisième ordre. On retrouve le modèle de von Mises pour  $C_i = 0 \forall i$ ,  $C_{ij} = \delta_{ij}$  et  $C_{ijk} = 0 \forall i, j, k$ . Nous pouvons qualitativement représenter les effets des trois principaux termes de

l'équation (2.17) dans le cas d'un chargement 2D où le domaine d'élasticité s'écrit :

$$F = a_1 S'_1 + b_1 S'_2 + \sqrt{a_2 S'^2_1 + b_2 S'^2_2} + \frac{a_3 S'^3_1 + b_3 S'^3_2 + c_3 S'^2_1 S'_2 + d_3 S'_1 S'^2_2}{S'^2_1 + S'^2_2} - R \leq 0 \quad (2.18)$$

Le critère de Hill agit sur les termes  $a_2$  et  $b_2$  mais ne permet pas d'introduire de distorsion. Par conséquent nous conservons  $a_2 = b_2 = 1$  comme dans le modèle de von Mises.

Sur la figure 2.10 sont représentés les effets des termes  $a_1$  et  $b_1$ . Il apparaît clairement que les termes linéaires de l'état de contrainte utilisés par Harvey *et al.* [Harvey *et al.* 83] ne permettent pas d'introduire de distorsion, tout au plus une translation et un gonflement du domaine d'élasticité.

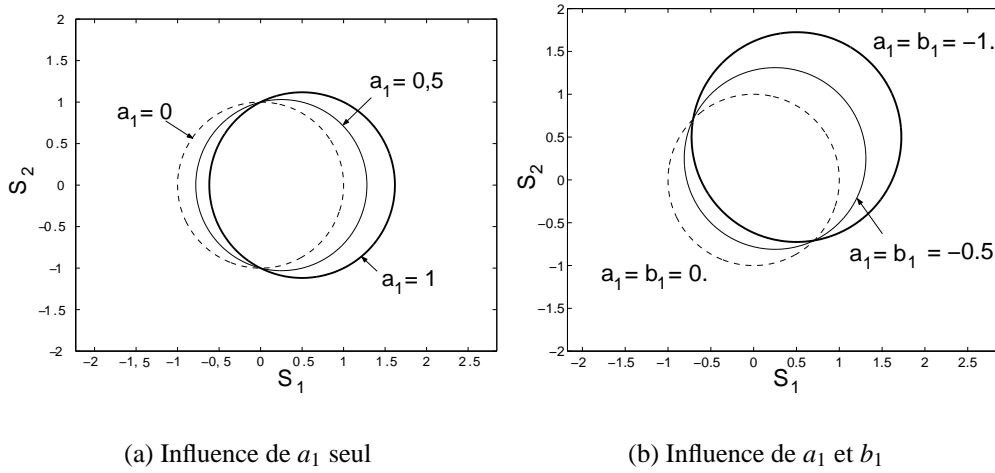


FIG. 2.10 – Influence des coefficients  $a_1$  et  $b_1$  sur la distorsion du domaine d'élasticité

L'influence des coefficients  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$  et  $d_3$  est représentée sur la figure 2.11. Tous ces coefficients permettent à l'évidence de décrire la distorsion "classique" du domaine d'élasticité, d'où l'intérêt du troisième invariant des contraintes pour représenter la distorsion du domaine d'élasticité. Gupta et Meyers [Gupta et Meyers 92], [Gupta et Meyers 94] proposent par exemple de construire le domaine d'élasticité comme la somme de fonctions du 2<sup>ème</sup> et du 3<sup>ème</sup> invariant :

$$F = \sum_{i=1}^n f_i J_{2_i} \left[ 1 + g_i \left( \frac{J_{3_i}}{J_{2_i}} \right)^{m_i} \right] - 1 \leq 0 \quad (2.19)$$

avec  $m_i$  des coefficients matériau,  $f_i$  et  $g_i$  des variables fonctions du chargement et  $J_{2_i}$  et  $J_{3_i}$  les second et troisième invariants des vecteurs  $S - X_i$  respectivement. Pour  $n = 3$ , les auteurs du modèle sont capables de retrouver parfaitement plusieurs surfaces seuils expérimentales, mais ils ne proposent aucune loi d'évolution pour les variables  $f_i$  et

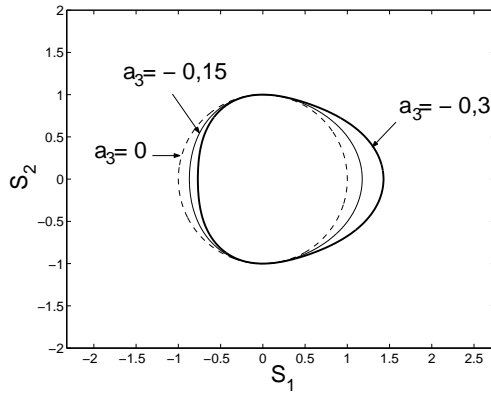
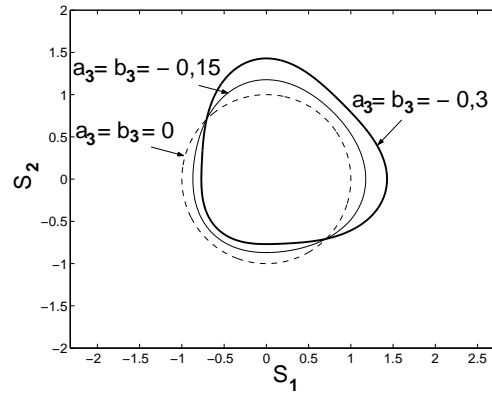
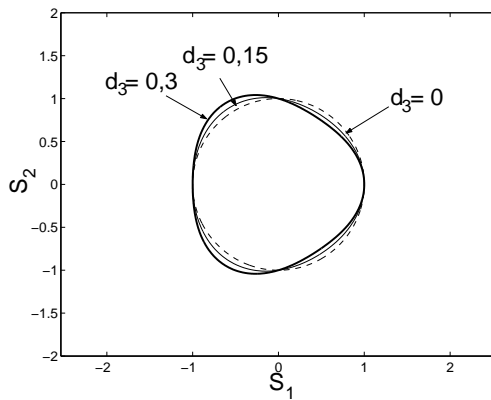
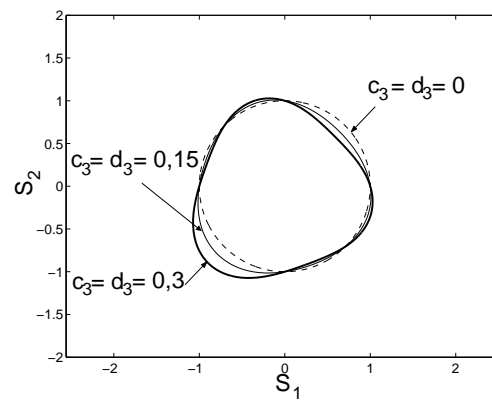
(a) Influence de  $a_3$  seul(b) Influence de  $a_3$  et  $b_3$ (c) Influence de  $d_3$  seul(d) Influence de  $c_3$  et  $d_3$ 

FIG. 2.11 – Influence des coefficients  $a_3$ ,  $b_3$ ,  $c_3$  et  $d_3$  sur la distortion du domaine d'élasticité

$g_i$ <sup>9</sup>.

En revenant à l'équation (2.18), une façon simple de représenter la distorsion dans le cas d'un chargement uniaxial est de considérer que la direction de chargement  $\underline{u}$  est l'axe des abscisses d'un repère tournant par rapport au repère de base (fig. 2.12). Dans

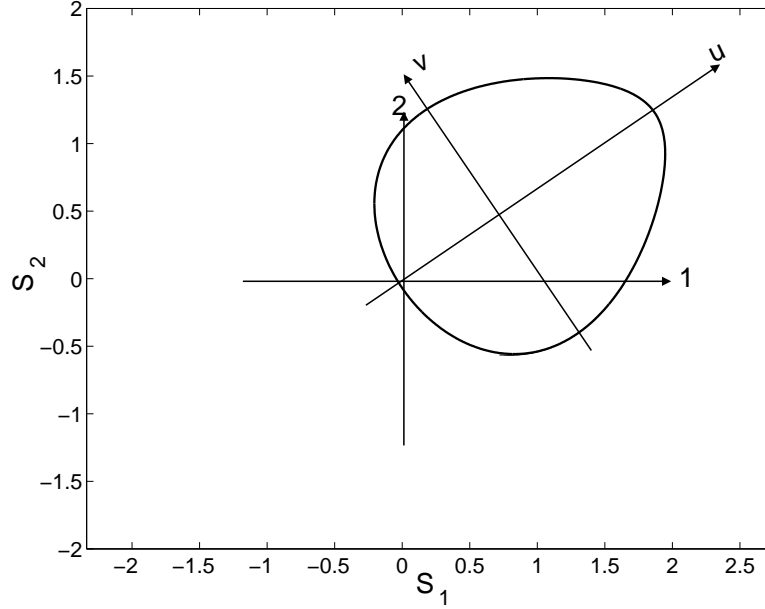


FIG. 2.12 – Introduction d'un repère mobile pour définir la distorsion des surfaces seuil

ce repère tournant, la distorsion peut alors être introduite en considérant soit que seul le coefficient  $a_3$  est non nul (fig. 2.11(a)) [Rees 83], soit que seul le coefficient  $d_3$  est non nul (fig. 2.11(c)).

Dans le premier cas, le domaine d'élasticité s'écrit dans le repère mobile  $(A, \underline{u}, \underline{v})$  :

$$F = \sqrt{\hat{S}'_i \hat{S}'_i} + a_3 \frac{(\hat{S}'_1)^3}{\hat{S}'_i \hat{S}'_i} - R \leq 0 \quad (2.20)$$

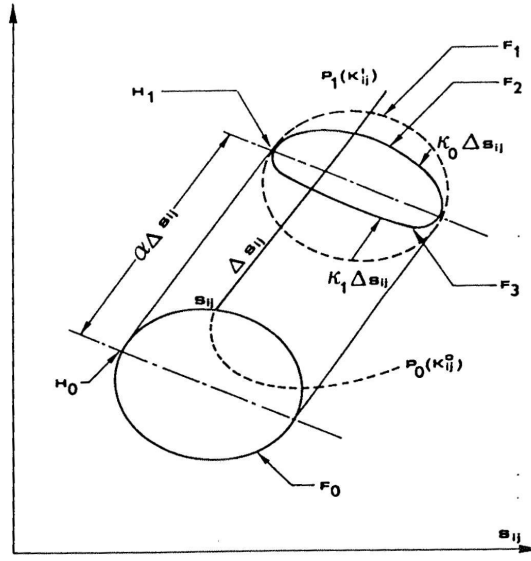
avec  $\hat{S}'_i$  les coordonnées du vecteur  $\underline{S}' = \underline{S} - \underline{X}$  dans le repère mobile. En particulier :

$$\hat{S}'_1 = \underline{\hat{S}}' \cdot \underline{\hat{u}} = \underline{S}' \cdot \underline{u} = S'_i u_i \quad (2.21)$$

Dans le repère de base, l'équation du domaine d'élasticité peut alors s'écrire :

$$F = \sqrt{S'_i S'_i} + a_3 \frac{(S'_i u_i)^3}{S'_i S'_i} - R = \sqrt{S'_i S'_i} + a_3 \frac{u_i u_j u_k S'_i S'_j S'_k}{S'_i S'_i} - R \leq 0 \quad (2.22)$$

9. Les auteurs se contentent en fait de tracer l'évolution de ces variables une fois identifiées sur les surfaces seuil successivement obtenues au cours d'un trajet d'écroutissage uniaxial monotone.

FIG. 2.13 – *Modèle de Phillips, d'après [Phillips et Weng 75]*

ce qui permet de choisir le tenseur d'anisotropie  $C_{ijk}$  introduit dans l'équation (2.17) :

$$C_{ijk} = u_i u_j u_k \quad (2.23)$$

Dans le cas où seul le paramètre  $d_3$  est non nul, le domaine d'élasticité s'écrit dans le repère mobile :

$$F = \sqrt{\hat{S}'_i \hat{S}'_i} + d_3 \hat{S}'_1 \frac{\hat{S}'_{\perp j} \hat{S}'_{\perp j}}{\hat{S}'_i \hat{S}'_i} - R \leq 0 \quad \text{avec} \quad \underline{\hat{S}}'_{\perp} = \underline{\hat{S}}' - \hat{S}'_1 \underline{\hat{u}} \quad (2.24)$$

et dans le repère de base :

$$F = \sqrt{S'_i S'_i} + d_3 S'_i u_i \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{S'_i S'_i} - R \leq 0 \quad \text{avec} \quad \underline{S}'_{\perp} = \underline{S}' - (\underline{S}' \cdot \underline{u}) \underline{u} \quad (2.25)$$

On peut obtenir des modèles à distorsion semblables en suivant l'approche de Phillips et Weng [Phillips et Weng 75] qui proposent de diviser la fonction seuil en deux, de part et d'autre d'une zone  $H_0$  où la normale à la surface seuil est orthogonale à la direction de chargement  $\underline{u}$  ou  $\underline{\Delta S}$  (Fig. 2.13).

La distorsion de la surface seuil est alors introduite grâce à deux fonctions  $F_2(\underline{S})$  et  $F_3(\underline{S})$  différentes et qui agissent respectivement sur chacune de ces deux parties, une fois la surface seuil translatée de  $\alpha \underline{u}$  par un écrouissage purement cinématique ( $F_1 = F(\underline{S}' - \alpha \underline{u})$ ).

$$\begin{cases} F_2(\underline{S}') = F(\underline{S}' - (\alpha + k_0) \underline{u}) \\ F_3(\underline{S}') = F(\underline{S}' - (\alpha + k_1) \underline{u}) \end{cases} \quad (2.26)$$

avec  $F(\underline{S}')$  l'équation du domaine d'élasticité non distordu :

$$F(\underline{S}') = \|\underline{S}'\| - R \leq 0 \quad (2.27)$$

Phillips et Weng ne proposent pas de loi d'évolution concernant ces fonctions  $F_2$  et  $F_3$ . Rousset [Rousset 85] propose alors une simplification du modèle en considérant que l'amplitude de déformation de la surface seuil est identique vers "l'avant" et vers "l'arrière". Il introduit donc la "contrainte distordue"<sup>10</sup> suivante :

$$\underline{S}_d = \underline{S}' - \underline{D} = \underline{S}' - \beta R \left( \frac{|\hat{S}'_1|}{\sqrt{S'_i S'_i}} \right)^n \underline{u} \quad (2.28)$$

avec  $\beta$  et  $n$  deux facteurs de forme, le domaine d'élasticité étant défini par l'équation :

$$F = \|\underline{S}'_d\| - R \leq 0 \quad (2.29)$$

Si  $\beta = 0$ , on retrouve le modèle de von Mises. Pour  $n = 0$ , on retrouve aussi le domaine de von Mises, mais décalé de  $\beta R$  (Fig. 2.14).

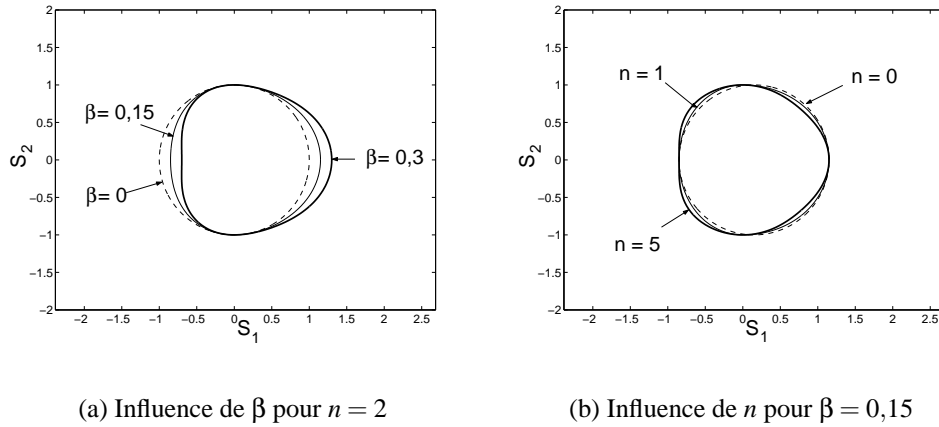


FIG. 2.14 – Influence des coefficients  $\beta$  et  $n$  dans le modèle de Rousset [Rousset 85]

Pour  $n = 2$ , on retrouve un domaine d'élasticité semblable à celui proposé par François [François 01] puisque la "contrainte distordue" définie en (2.28) devient :

$$\underline{S}_d = \underline{S}' - \beta R \frac{S'_i S'_i - S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{S'_i S'_i} \underline{u} = \underline{S}' + \beta R \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{S'_i S'_i} \underline{u} - \beta R \underline{u} \quad (2.30)$$

alors que François propose :

$$\underline{S}'_d = \underline{S}' + \alpha \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{R} \underline{u} \quad (2.31)$$

10. terminologie utilisée dans [François 01].



le domaine d'élasticité étant toujours décrit par l'équation (2.29).

En effet, étant donné que  $\sqrt{S'_i S'_i} \simeq R$ , la différence essentielle entre les deux modèles vient du terme  $-\beta R \underline{u}$ . Dans le modèle de Rousset, la zone de points où la normale à la surface seuil est orthogonale à la direction de distorsion  $\underline{u}$  reste fixe et c'est le reste de la surface qui "avance" selon  $\underline{u}$ , ce qui provoque au passage un écrouissage cinématique supplémentaire égal à  $\beta R$ . A l'inverse, dans le modèle de François, la distorsion et l'écrouissage cinématique restent découplés, ce qui facilite leur identification (Fig. 2.15).

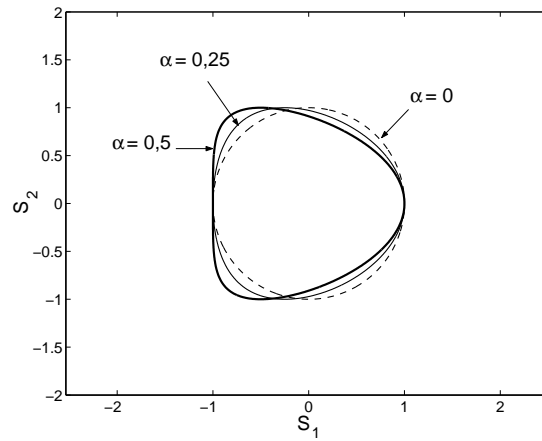


FIG. 2.15 – *Modèle à distorsion de François [François 01]*

D'autre part, avec la définition de la contrainte  $\underline{S}_d$  proposée par François [François 01], nous prenons le carré de l'expression (2.29) :

$$S'_i S'_i + \alpha^2 \left( \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{R} \right)^2 + 2 S'_i u_i \alpha \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{R} \leq R^2 \quad (2.32)$$

à comparer avec le même développement pour l'équation (2.25) :

$$S'_i S'_i + d_3^2 (S'_i u_i)^2 \left( \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{S'_i S'_i} \right)^2 + 2 S'_i u_i d_3 \frac{S'_{\perp j} S'_{\perp j}}{\sqrt{S'_k S'_k}} \leq R^2 \quad (2.33)$$

On note cette fois que la principale différence entre ces deux derniers modèles réside dans le second terme des deux expressions. Dans le modèle de François (comme dans celui de Rousset d'ailleurs), l'effet de distorsion est obtenu sans aucune variation de la dimension transverse du domaine d'élasticité (voir eq. (2.31) et Fig. 2.15) alors que dans l'autre cas cette dimension augmente en "arrière" de la distorsion (Fig. 2.11(c)).

### 2.2.2.2 Équations d'évolution des variables de distorsion

Les quelques modèles présentés précédemment sont tous capables de décrire la forme d'œuf caractéristique des surfaces seuil détectées suite à un écrouissage uniaxial

monotone. Or, la distorsion des surfaces seuil évolue au cours du chargement, tant en amplitude qu'en direction pour des trajets multiaxiaux. Les constantes introduites dans les modèles précédents deviennent alors des variables qui évoluent, comme la direction  $\underline{u}$  de la distorsion, en fonction du chargement. Pour les trajets uniaxiaux et quelques trajets non-proportionnels, la direction de distorsion est confondue avec la direction de translation du domaine d'élasticité. La plupart des auteurs [Rees 83], [Rousset 85], [François 01] choisissent donc :

$$\underline{u} = \frac{\underline{X}}{\|\underline{X}\|} \quad (2.34)$$

De plus, le niveau de distorsion augmente avec le chargement puis semble saturer [Rousset 85]. La saturation de la distorsion peut alors être décrite par une équation du type :

$$d = d_{max} \left[ 1 - e^{-\delta \|\underline{X}\|} \right] \quad (2.35)$$

avec  $d$  le paramètre qui permettait de régler le niveau de distorsion dans les différents modèles présentés plus haut ( $d = a_3, d_3, \beta, \alpha, \dots$ ).

François [François 01] propose plutôt d'utiliser l'équation d'évolution non-linéaire proposée par Armstrong et Frederick [Armstrong et Frederick 66] pour l'écrouissage cinématique :

$$\dot{\underline{X}} = C\dot{\underline{\epsilon}}^p - \gamma \underline{X} \dot{p} \quad (2.36)$$

qui donne une valeur maximum  $C/\gamma$  à l'écrouissage cinématique, *i.e.*  $\|\underline{X}\| < C/\gamma$ . Il suffit ensuite de faire dépendre linéairement la distorsion de  $\|\underline{X}\|$  :

$$d = \frac{\|\underline{X}\|}{X_1} \quad (2.37)$$

avec  $X_1$  un paramètre dépendant du matériau et qui règle le niveau de saturation de la distorsion en fonction du niveau de saturation de l'écrouissage cinématique  $C/\gamma$ .

Enfin, Rousset [Rousset 85] propose pour le vecteur distorsion  $\underline{D}$  de l'équation (2.28) l'évolution suivante <sup>11</sup> :

$$\dot{\underline{D}} = \Gamma \left\{ \left( \frac{|\hat{S}'_1|}{\sqrt{S'_i S'_i}} \right)^n \dot{\underline{X}} - \Delta \underline{D} \|\dot{\underline{X}}\| \right\} \quad (2.38)$$

avec  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux coefficients dépendant du matériaux.

Au cours de trajets uniaxiaux monotones, cette équation décrit une évolution non-linéaire de la distorsion vis-à-vis de l'écrouissage cinématique, tout à fait similaire à celle décrite par l'équation (2.35). Elle garantit donc une valeur maximale pour la distorsion,  $\|\underline{D}\| \leq 1/\Delta$ . En revanche, elle n'oblige pas la distorsion à rester dans le même sens que l'écrouissage cinématique au cours de trajets cycliques, ce qui permet par exemple de représenter une surface seuil dont la distorsion est orientée vers

11. La variable  $R$  est introduite dans l'équation (2.28) uniquement pour des raisons d'homogénéité. Etant donnée l'équation d'évolution (2.38) proposée par [Rousset 85], elle disparaît évidemment.

l'origine des contraintes (cas pouvant être rencontré expérimentalement pour les toutes premières surfaces seuil obtenues lors d'une décharge). En outre, lors de trajets multiaxiaux non-proportionnels, la direction de la distorsion ne restera pas colinéaire à celle de l'écroutissage cinématique.

La convexité de la surface n'est pas démontrée pour tout trajet de chargement, mais Rousset obtient cependant des résultats très corrects pour une base d'essais non-proportionnels assez large [Rousset 85].

A noter que pour ce type de trajets, Rees [Rees 83] propose plutôt de choisir :

$$\underline{u} = \frac{\dot{\underline{X}}}{\|\dot{\underline{X}}\|} \quad (2.39)$$

mais sans procéder à une identification sur des résultats d'essais.

De par sa simplicité (1 à 3 paramètre(s) nécessaire(s) pour modéliser la distorsion), cette approche est intéressante mais reste insuffisamment développée. À ma connaissance, aucune relation de comportement capable de reproduire à la fois les surfaces seuil expérimentales et les réponses  $(\varepsilon - \sigma)$  d'un matériau n'est proposée dans la littérature, les auteurs se contentant souvent d'illustrer les capacités de leur modèle en réalisant une identification sur quelques surfaces seuil expérimentales. Le caractère prédictif de ces modèles, notamment pour des trajets cycliques non-proportionnels, n'est donc pas évident<sup>12</sup>. Il y a plusieurs raisons à cela. Tout d'abord, une seule forme de distorsion est envisagée, ce qui va à l'encontre des observations expérimentales faites au cours de chargements non-proportionnels. De plus, comme l'écrit Rees et comme nous le verrons plus tard, le choix de  $\underline{X}$  pour la direction de distorsion n'est plus justifié pour des sollicitations non-proportionnelles. En effet, une pointe apparaît au point de chargement avant que le domaine d'élasticité ne se soit translaté jusqu'à ce que  $\underline{S} = k\underline{X}$ . Les vecteurs  $\underline{S} - \underline{X}$  ou  $\dot{\underline{X}}$  sont peut-être de meilleurs candidats, mais les retenir nécessite des relations de comportement élaborées. En effet, on ne peut imaginer une rotation instantanée de la surface seuil lorsque le chargement change de direction en passant par l'intérieur du domaine d'élasticité. L'équation (2.38) proposée par Rousset mériterait donc d'être validée sur d'autres essais incluant cette fois-ci les courbes de comportement  $(\varepsilon - \sigma)$  du matériau. Enfin, on pourrait imaginer utiliser tous les paramètres de (2.18) pour améliorer ce type de modèles mais dans ce cas, la convexité du domaine est difficile à garantir pour tout chargement<sup>13</sup>.

### 2.2.3 Modèles à distorsion basés sur une description géométrique des surfaces seuil

Nous recensons ici quelques modèles dont la construction ne s'est *a priori* pas appuyée sur les propriétés intéressantes du troisième invariant des contraintes. Nous

12. Rousset et François identifient leur modèle sur des surfaces seuil obtenues lors de tels trajets mais ne montrent aucune courbe de comportement.

13. Même dans le cas où seul le paramètre  $a_3$  est non nul, des surfaces non-convexes peuvent être obtenues si les valeurs de  $a_3$  sortent d'un domaine de validité à définir.

présentons tout d'abord le modèle développé par Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91] qui cherche à décrire précisément les transformations locales de la surface seuil (effets de pointe et de plat) sans être dépendant d'une forme d'équation de surface particulière. Ensuite, nous illustrerons le principe du modèle de Ortiz et Popov [Ortiz et Popov 83] basé sur des équations polaires de surface. Enfin, le modèle que nous avons retenu pour cette étude, développé par Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 85], [Kurtyka et Życzkowski 96] et issu lui aussi de l'étude de surfaces polaires, sera restitué tel qu'il fut présenté par ses auteurs. Les développements que nous avons apportés à ce modèle seront décrits dans le prochain chapitre.

### 2.2.3.1 Modèle de Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91]

Le modèle de Boucher et Cordebois a été développé pour répondre à certains problèmes de mise en forme des matériaux (notamment l'emboutissage) dans lesquels de grandes déformations plastiques interviennent. Il s'appuie sur une observation fine des résultats expérimentaux de détection de surface seuil. On rappelle qu'au point de chargement, une pointe se forme et qu'à l'opposé, un plat apparaît sur la surface seuil. Les auteurs définissent alors sous forme de scalaire :

- un écrouissage “direct”  $\dot{\sigma}_d$  au point de chargement actuel,
- un écrouissage “indirect”  $\dot{\sigma}_i$  au point dont la normale à la surface seuil est de sens opposé à celle du point de chargement actuel,
- un écrouissage “latent”  $\dot{\sigma}_l$  pour tous les points dont la normale à la surface seuil est orthogonale aux deux précédentes normales.

Après avoir défini ces différents écrouissages, Boucher et Cordebois appliquent au reste de la surface un écrouissage fonction de la position du point sur la surface (entre les points d'écrouissage direct et d'écrouissage latent ou entre les points d'écrouissage indirect et d'écrouissage latent) :

$$\dot{\sigma}(\varphi) = \dot{\sigma}_d f_d(\varphi) + \dot{\sigma}_i f_i(\varphi) + \dot{\sigma}_l f_l(\varphi) \quad (2.40)$$

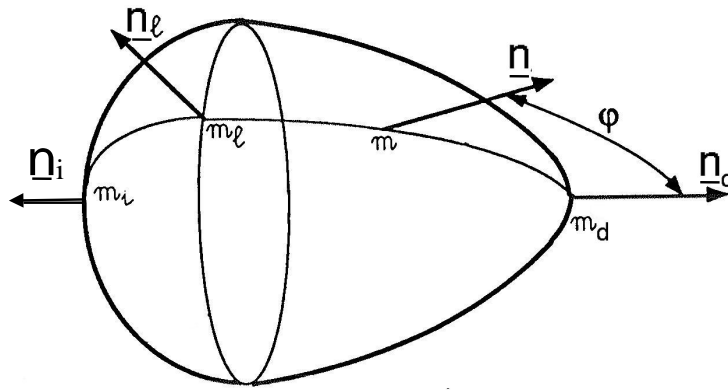
avec  $\varphi$  l'angle entre un point de la surface seuil et le point courant de chargement (Fig. 2.16) et :

$$f_d(\varphi) = (\langle \cos \varphi \rangle)^2 \quad f_i(\varphi) = (\langle -\cos \varphi \rangle)^2 \quad f_l(\varphi) = (\sin \varphi)^2 \quad (2.41)$$

Des lois d'évolution sont proposées pour les trois types d'écrouissage cités plus haut et identifiées sur des essais monotones (sans décharge élastique). Malheureusement, ces lois sont pour l'instant trop simples pour pouvoir rendre compte de l'évolution du domaine d'élasticité lors de trajets multiaxiaux quelconques<sup>14</sup>.

Lors de trajets avec décharge, il est nécessaire d'avoir une représentation approchée de

14. La translation et le gonflement du domaine ne sont pas pris en compte par des variables spécifiques mais sont une conséquence de l'évolution des écrouissages direct, indirect et latent.

FIG. 2.16 – *Modèle de Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91]*

la surface distordue pour connaître le nouveau point d'entrée en plasticité (donné par une condition du type  $f = 0$ ). Le modèle de Boucher et Cordebois doit donc “caler” une équation de surface sur le résultat du dernier chargement monotone, ce qui implique un coût de calcul non négligeable. D'autre part, le lieu des points d'écrouissage direct, indirect et latent change à chaque entrée en plasticité. Il faut donc rechercher numériquement ces nouveaux points. Enfin, l'évolution des trois écrouissages doit tenir compte de l'histoire du matériau, c'est-à-dire de l'écrouissage subi par ces points lors des précédents chargements. On comprend alors que pour des trajets cycliques complexes l'utilisation du modèle devienne fastidieuse, mais il convient de rappeler que ce modèle n'a pas été conçu pour décrire de tels trajets.

L'avantage majeur de ce modèle par rapport à tous les autres de la littérature est qu'il permet de décrire *a priori* n'importe quelle surface distordue. En particulier, les effets de pointe et de plat ont bien lieu au nouveau point de chargement plastique et à l'opposé de celui-ci respectivement, et ce quelle que soit la forme obtenue à la fin du dernier chargement plastique. De plus, le modèle garantit que la surface reste convexe. Les limites de ce modèle sont son coût en temps de calcul et le fait qu'il ne possède pas encore de lois de comportement robustes pour les trajets cycliques complexes.

### 2.2.3.2 Modèle de Ortiz et Popov [Ortiz et Popov 83]

Le modèle de Ortiz et Popov s'appuie sur une série de Fourier contenant des angles  $\theta_n$  entre le déviateur des contraintes “translaté”  $\underline{S}'$  et certaines directions particulières  $\underline{\beta}_n$  définissant la distorsion. Le domaine d'élasticité est constitué de l'ensemble des points qui vérifient :

$$||\underline{S}'|| = R \left( 1 + \sum_{n=2}^N \rho_n \cos n\theta_n \right) \quad (2.42)$$

avec  $\rho_n$  des variables internes et  $\cos \theta_n = \underline{S}' \cdot \underline{\beta}_n$ .

Le terme d'indice 2 (c'est-à-dire  $\rho_2 \cos 2\theta_2$ ) produit une variation de la surface diffé-

rente entre la direction  $\underline{\beta}_2$  et les directions perpendiculaires (Fig. 2.17(a)). Ce terme, combiné avec un écrouissage isotrope approprié, peut donc rendre compte du phénomène de "cross-effect" parfois observé expérimentalement. Le terme d'indice 3,  $(\rho_3 \cos 3\theta_3)$ , permet quant à lui d'obtenir une forme de "trilobes", qui s'apparente à celle d'un œuf, vis-à-vis de la direction  $\underline{\beta}_3$  (Fig. 2.17(b)).

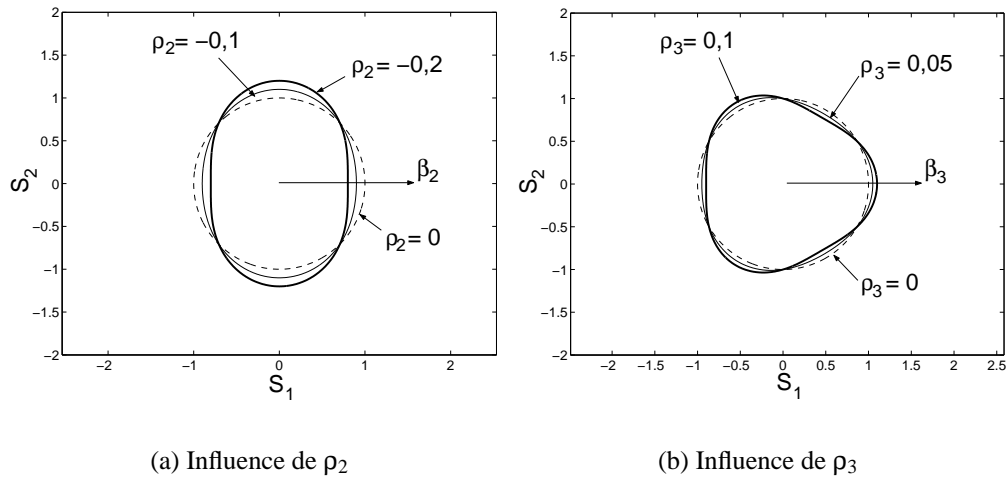


FIG. 2.17 – Influence des coefficients  $\rho_2$  et  $\rho_3$  dans le modèle de Ortiz et Popov, [Ortiz et Popov 83]

Ainsi, une combinaison de ces deux premiers termes est suffisante pour pouvoir représenter les distorsions de surfaces seuil obtenues suite à un chargement proportionnel [Ortiz et Popov 83]. Des formes plus complexes peuvent être obtenues en augmentant le nombre de termes dans l'équation (2.42), mais l'identification d'un tel modèle ne sera alors certainement pas aisée. Les auteurs choisissent eux aussi comme direction de distorsion la direction de l'écrouissage cinématique,  $\underline{\beta}_2 = \underline{\beta}_3 = \underline{X}/\|\underline{X}\|$ . Pour rendre compte de la saturation de la distorsion au cours d'un chargement monotone, ils proposent une évolution non-linéaire des variables  $\rho_n$  par rapport à l'écrouissage cinématique, semblable à l'équation (2.35).

### 2.2.3.3 Modèle de Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96]

Le modèle proposé par Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 85] permet de rendre compte des évolutions suivantes d'une surface seuil :

1. Expansion proportionnelle, ou écrouissage isotrope,
2. Translation, ou écrouissage cinématique,
3. Déformation affine ou déformation ellipsoïdale,
4. Rotation,
5. Distorsion excédant la déformation affine.

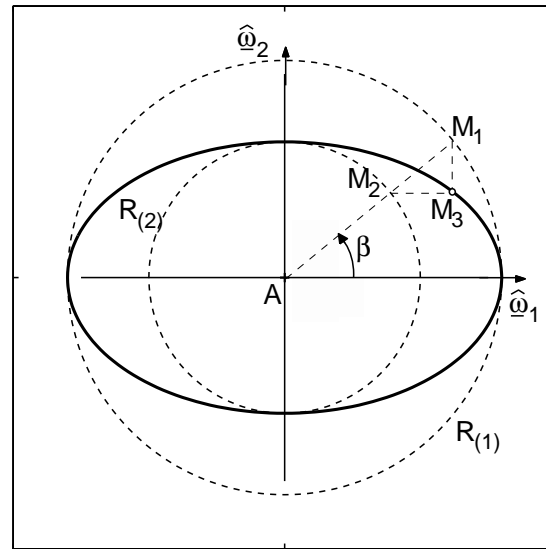


FIG. 2.18 – Construction polaire d'une ellipse

Les hypothèses du modèle sont d'une part que le domaine d'élasticité initial correspond au modèle de von Mises et d'autre part que le comportement plastique du matériau est indépendant du premier et du troisième invariant des contraintes<sup>15</sup>. Ce modèle est fondé sur une généralisation de la construction polaire d'une ellipse, illustrée sur la figure 2.18. Soient un repère orthonormé  $(A, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$  et 2 cercles de même centre  $A$  et de rayon  $R_{(1)}$  et  $R_{(2)}$  respectivement. Soit une demi-droite, appelée rayon de projection, qui part de  $A$  et coupe le premier cercle en  $M_1$  et le deuxième en  $M_2$ . Nous construisons un troisième point  $M_3$  qui a pour coordonnées l'abscisse de  $M_1$  et l'ordonnée de  $M_2$ . L'ensemble des points  $M_3$  ainsi construits pour tout rayon de projection venant de  $A$  (*i.e.* pour tout angle  $\beta$  sur la figure 2.18) constitue une ellipse. En considérant que le repère de construction est mobile par rapport à un repère fixe  $(O, \underline{u}_1, \underline{u}_2)$ , il est alors possible de translater et de faire tourner cette ellipse.

En étendant ce principe de construction géométrique au cas de deux cercles qui ne sont plus concentriques, Kurtyka et Życzkowski montrent que l'on peut obtenir une courbe qui a la forme d'un domaine d'élasticité distordu (Fig. 2.19(a)). Dans ce cas, on choisit pour la base  $(\underline{u}_1, \underline{u}_2)$  du repère fixe deux des vecteurs de base de l'espace des déviateurs, présentés dans la partie (2.1.2.1). Un des avantages de ce modèle est que les paramètres permettant de régler la distorsion (coordonnées des centres de cercles, taille des cercles, ...) ont une réelle signification géométrique, ce qui facilite leur identification vis-à-vis d'une surface seuil expérimentale.

A titre d'exemple, la distorsion du domaine d'élasticité due à un trajet monotone uniaxial dans une direction  $\underline{u}$  peut être facilement représentée en orientant la direction  $\underline{u}_1$  du repère mobile dans cette direction et en décalant le premier cercle sur l'axe  $\underline{u}_1$

15. Une adaptation du modèle pour des matériaux anisotropes ou ayant un comportement dépendant du troisième invariant est proposée dans [Życzkowski et Kurtyka 84].

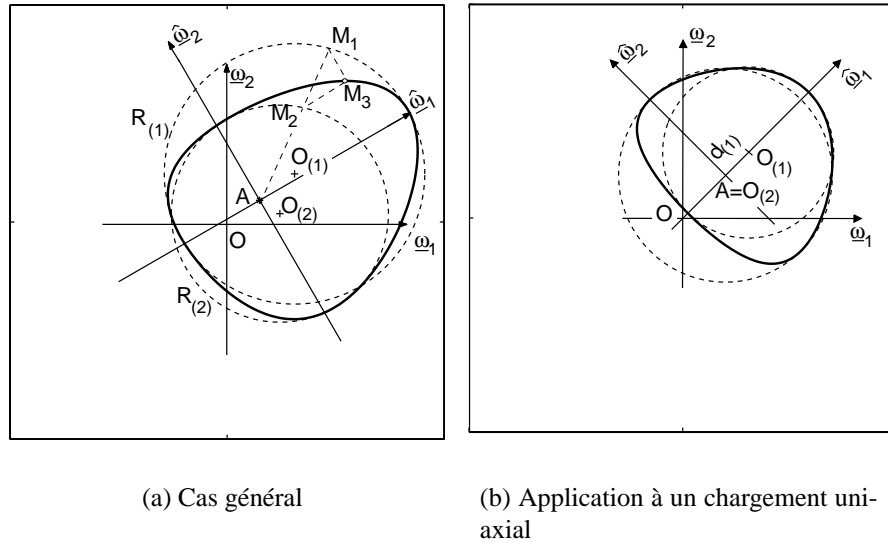


FIG. 2.19 – Construction polaire d'un domaine d'élasticité distordu

(Fig. 2.19(b)). La translation du domaine d'élasticité sera prise en compte en partie par ce décalage du premier cercle, mais aussi par une translation du repère mobile de construction. On remarque donc au passage que, dans ce modèle, la distorsion du domaine d'élasticité est représentée par une variable qui s'apparente à un écrouissage cinématique "classique"<sup>16</sup>. Par ailleurs, une éventuelle augmentation de la taille du domaine dans la direction du chargement sera prise en compte par une augmentation de la taille du premier cercle (décrite par la variable  $R_{(1)}$ ) et si un phénomène de "cross-effect" (*i.e.* une augmentation de la taille du domaine d'élasticité dans la direction transverse à celle du chargement) est présent, il sera pris en compte par la taille du deuxième cercle (décrite par la variable  $R_{(2)}$ ).

Dans le cas d'un chargement multiaxial quelconque, ce principe de construction se généralise dans un espace vectoriel orthonormé à cinq dimensions, à savoir l'espace vectoriel des déviateurs introduit précédemment. Tout déviateur se décompose selon les 5 vecteurs de base de cet espace, mutuellement orthogonaux. Nous passons alors de deux cercles à cinq hypersphères d'indice ( $i$ ) ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), de centre  $O_{(i)}$  et de rayon  $R_{(i)}$ . La procédure de projection consiste à tracer un rayon de projection qui va couper les 5 hypersphères en 5 points  $M_{(i)}$ . Un point de la surface seuil est ensuite construit tel que sa  $i^{\text{ème}}$  coordonnée soit la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée du point  $M_{(i)}$  ( $1^{\text{ère}}$  coordonnée de  $M_{(1)}$ ,  $2^{\text{ème}}$  coordonnée de  $M_{(2)}$ ,  $\dots$ ,  $5^{\text{ème}}$  coordonnée de  $M_{(5)}$ ). Ensuite, il ne reste plus qu'à construire l'ensemble des points de la surface seuil en traçant tous les rayons de projection possibles venant de A.

16. Cette remarque aura son importance lorsqu'il s'agira d'écrire des lois d'évolution sur les variables du modèle.



La description mathématique la plus simple de cette surface est obtenue dans le système de coordonnées mobile  $(A, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \dots, \hat{\omega}_5)$ , translaté et tourné par rapport au système d'origine  $(O, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_5)$ . Les vecteurs unitaires du repère mobile sont liés aux vecteurs unitaires du système d'origine par la relation :

$$\hat{\omega}_i = Q_{ij} \omega_j \quad (2.43)$$

avec  $Q_{ij}$  une matrice orthogonale de dimension (5,5). Kurtyka et Życzkowski définissent le vecteur “contrainte active”,  $\hat{S}$ , lié au vecteur déviateur des contraintes  $\underline{S}$  par la relation [Kurtyka et Życzkowski 85] :

$$\hat{S}_i = Q_{ij}(S_j - X_j) \quad (2.44)$$

où le vecteur  $\underline{X}$  décrit la translation du centre du repère mobile et peut donc être interprété comme un écrouissage cinématique.

La position des cinq hypersphères de centre  $O_{(i)}$  est définie dans le repère mobile par cinq vecteurs  $\underline{d}_{(i)}$ . Ces vecteurs sont responsables de la distorsion non elliptique de la surface seuil, d'où la notation  $d$ . Dans la suite du texte, un indice entre parenthèses indique une étiquette (numéro de chaque hypersphère) et n'est pas soumis à la sommation.

**2.2.3.3.1 Équation de la surface seuil** Les coordonnées du point  $M_{(i)}$  intersection du rayon de projection et de l'hypersphère  $(i)$  sont dans le repère mobile :

$$\hat{S}_{(i)j} = \rho_{(i)} t_j \quad (2.45)$$

avec  $\underline{t}$  le vecteur unitaire du rayon de projection (Fig. 2.20). Le point de la surface seuil construit avec ces points  $M_{(i)}$  a donc pour coordonnées :

$$\hat{S}_i = \hat{S}_{(i)i} = \rho_{(i)} t_i \quad (2.46)$$

Pour connaître  $\rho_{(i)}$ , il suffit de résoudre l'équation suivante (voir Fig. 2.20) :

$$(\hat{S}_{(i)j} - d_{(i)j}) (\hat{S}_{(i)j} - d_{(i)j}) = R_{(i)}^2 \quad (2.47)$$

$$(\rho_{(i)} t_j - d_{(i)j}) (\rho_{(i)} t_j - d_{(i)j}) = R_{(i)}^2 \quad (2.48)$$

$$\rho_{(i)}^2 - 2\rho_{(i)} d_{(i)j} t_j + d_{(i)j} d_{(i)j} - R_{(i)}^2 = 0 \quad (2.49)$$

Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 85] proposent de retenir la racine positive de cette équation du second degré, c'est-à-dire celle qui correspond au sens du vecteur  $\underline{t}$  :

$$\rho_{(i)} = d_{(i)j} t_j + \left[ (d_{(i)j} t_j)^2 - d_{(i)j} d_{(i)j} + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \quad (2.50)$$

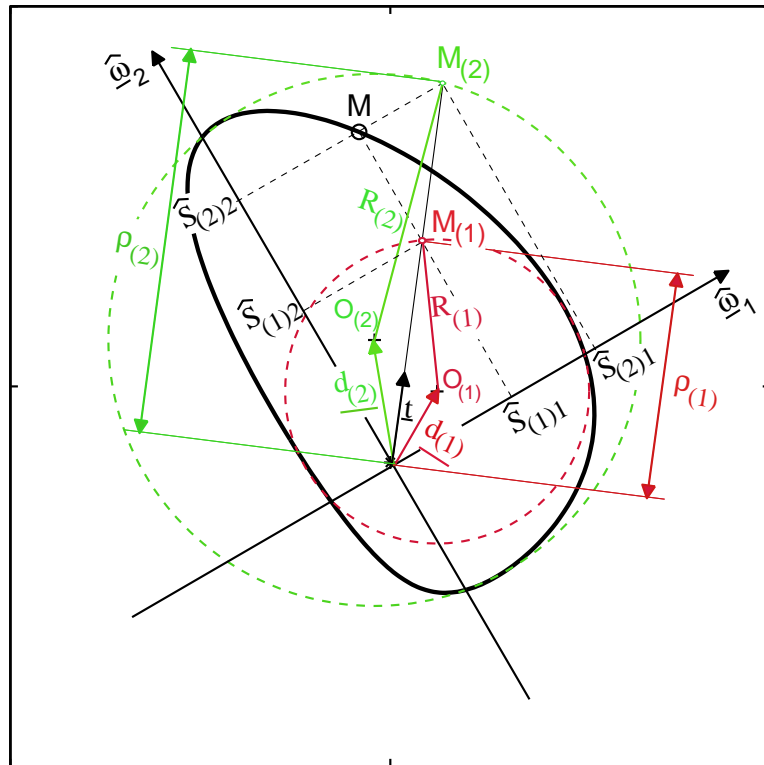


FIG. 2.20 – Paramètres utiles pour le calcul de l'équation de la surface seuil

Ainsi, l'équation polaire de la surface seuil peut s'écrire, dans le repère mobile :

$$\hat{S}_i = \left\{ d_{(i)j} t_j + \left[ (d_{(i)j} t_j)^2 - d_{(i)j} d_{(i)j} + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \right\} t_i \quad (2.51)$$

et dans le repère fixe :

$$S_j = Q_{ij}^{-1} \left\{ d_{(i)k} t_k + \left[ (d_{(i)k} t_k)^2 - d_{(i)k} d_{(i)k} + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \right\} t_i + X_j \quad (2.52)$$

L'équation (2.52) contient dans le cas général 45 paramètres dont :

- 5 responsables de l'expansion et de la déformation affine de la surface,  $R_{(i)}$ ,
- 5 responsables de la translation de la surface,  $X_j$ ,
- 10 responsables de la rotation de la surface,  $Q_{ij}$ <sup>17</sup>,
- 25 responsables de la distorsion de la surface,  $d_{(i)k}$ .

Seuls les 25 derniers coefficients sont vraiment nouveaux. Leur nombre est cependant trop important pour des applications pratiques et Kurtyka et Życzkowski proposent la simplification suivante de leur modèle :

$$d_{(i)j} = 0 \quad \text{pour } j \neq i \quad (2.53)$$

Cette simplification signifie que chaque hypersphère ne peut se translater que selon l'axe du système mobile qui porte le même indice qu'elle (voir un exemple sur la figure 2.21). Il ne reste alors plus que cinq paramètres de distorsion non nuls  $d_{(i)i}$  que l'on peut noter  $d_{(i)}$ . L'équation du domaine d'élasticité dans le repère mobile devient :

$$\hat{S}_i = \left\{ d_{(i)} t_{(i)} + \left[ d_{(i)}^2 t_{(i)}^2 - d_{(i)}^2 + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \right\} t_i \quad (2.54)$$

Cette simplification permet en outre d'obtenir une équation implicite de la surface seuil. En effet, en prenant le carré de l'équation précédente, nous obtenons :

$$t_i^2 = \frac{\hat{S}_i^2}{2d_{(i)}^2 t_{(i)}^2 - d_{(i)}^2 + R_{(i)}^2 + 2d_{(i)} t_{(i)} \left[ d_{(i)}^2 t_{(i)}^2 - d_{(i)}^2 + R_{(i)}^2 \right]^{1/2}} \quad (2.55)$$

$$t_i^2 = \frac{\hat{S}_i^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)} \left\{ d_{(i)} t_{(i)} + \left[ d_{(i)}^2 t_{(i)}^2 - d_{(i)}^2 + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \right\} t_{(i)} - d_{(i)}^2} \quad (2.56)$$

$$t_i^2 = \frac{\hat{S}_i^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)} \hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2} \quad (2.57)$$

17. Seuls 10 paramètres sur les 25 sont indépendants lorsque l'on considère les 15 équations issues de la relation d'orthogonalité  $\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$ .

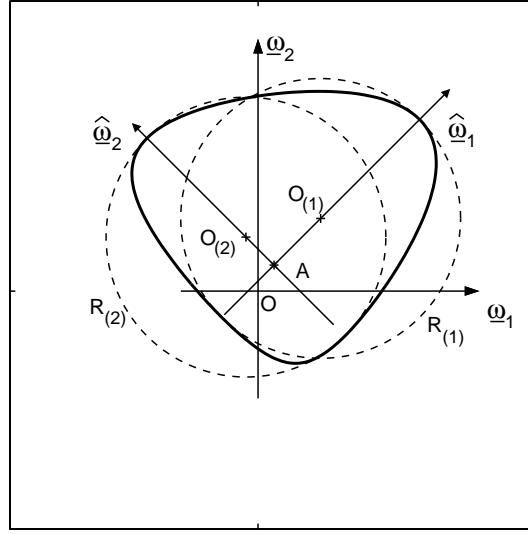


FIG. 2.21 – Surface seuil obtenue avec la version simplifiée du modèle proposée par Kurtyka et Życzkowski

Comme par ailleurs :

$$\sum_{i=1}^5 t_i^2 = 1 \quad (2.58)$$

il est possible de combiner les équations (2.57) et (2.58) pour éliminer les paramètres de construction polaire  $t_i$  et écrire l'équation implicite de la surface seuil :

$$F = \left( \sum_{i=1}^5 \frac{\hat{S}_{(i)}^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)}\hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2} \right) - 1 = 0 \quad (2.59)$$

La convexité d'une telle surface a été prouvée dans [Kurtyka et Życzkowski 85] dans le cas d'un chargement 2D. En revanche, la convexité des surfaces obtenues avec le modèle général (25 coefficients de distorsion) n'est pas assurée (voir par exemple Fig. 2.22).

Enfin, le pôle de projection doit toujours rester à l'intérieur de toutes les hypersphères pour que la construction géométrique ait un sens. Cette contrainte s'écrit :

$$d_{(i)j}d_{(i)j} < R_{(i)}^2 \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots 5. \quad (2.60)$$

ou dans le cas du modèle simplifié :

$$|d_{(i)}| < R_{(i)} \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots 5. \quad (2.61)$$

**2.2.3.3.2 Équations d'évolution** Kurtyka et Życzkowski proposent des lois d'évolution pour les différentes variables de leur modèle simplifié [Kurtyka et Życzkowski

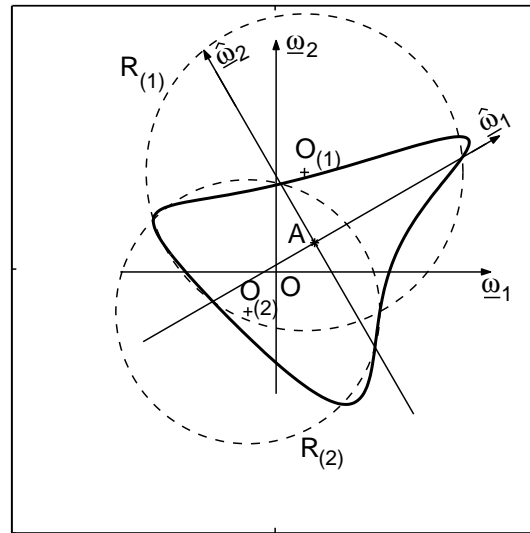


FIG. 2.22 – Exemple de construction d'une courbe non-convexe avec le modèle général

96]. Ces lois d'évolutions sont volontairement simples, la préoccupation des auteurs n'étant pas de prédire quantitativement les réponses en  $(\varepsilon - \sigma)$  mais de décrire certaines surfaces seuil. Nous reportons néanmoins ces lois d'évolution pour illustrer quelle était la base de notre travail.

**2.2.3.3.2.1 Rayons  $R_{(i)}$**  Le rayon  $R_{(1)}$  est responsable de l'écrouissage isotrope dans la direction d'un chargement proportionnel. Les auteurs ont choisi une loi d'évolution linéaire de ce rayon en fonction du taux de déformation plastique cumulée :

$$\dot{R}_{(1)} = b\dot{p} \quad (2.62)$$

avec  $\dot{p} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_i^p \dot{\varepsilon}_i^p}$  le taux de déformation plastique cumulée et  $b$  est un coefficient qui peut dépendre de la non-proportionnalité du chargement de façon à reproduire le phénomène de surécrouissage bien connu pour certains matériaux comme l'acier inoxydable 316L. Enfin,  $R_{(1)}$  prend pour valeur initiale  $S_0$ .

Les autres rayons  $R_{(i)}$  sont responsables des effets croisés, c'est-à-dire des dimensions de la surface seuil transverses à la direction de chargement. Ils sont supposés évoluer linéairement par rapport à  $R_{(1)}$ , d'où l'équation :

$$\dot{R}_{(2)} = (1 + \beta_1) \dot{R}_{(1)}, \quad \dot{R}_{(3)} = (1 + \beta_2) \dot{R}_{(1)}, \dots, \quad \dot{R}_{(5)} = (1 + \beta_4) \dot{R}_{(1)} \quad (2.63)$$

avec  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  4 coefficients dépendant du matériau et permettant de régler facilement la taille des 4 dernières hypersphères par rapport à la première.

**2.2.3.3.2.2 Translation du repère mobile  $\underline{X}$**  Comme nous l'avons déjà dit auparavant, la translation du repère mobile peut être interprétée comme un écrouissage

cinématique. Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96] proposent une évolution linéaire de Prager [Prager 58] :

$$\dot{X}_i = C\dot{\epsilon}_i^p \quad (2.64)$$

**2.2.3.3.2.3 Distorsion  $d_{(i)}$**  Dans le cas d'un chargement proportionnel, seule la variable  $d_{(1)}$  évolue. Les quatre  $d_{(i)}$  restants dépendent ainsi essentiellement de la non-proportionnalité du chargement. D'autre part, la condition (2.61) qui impose que le pôle de projection reste à l'intérieur de toutes les hypersphères est directement vérifiée en prenant pour équation d'évolution de  $d_{(i)}$  :

$$\dot{d}_{(i)} = C_{(i)}(R_{(i)}^2 - d_{(i)}^2)\dot{\epsilon}_{(i)}^p \quad \text{pour } i = 1, 2 \dots 5 \quad (2.65)$$

où les  $C_{(i)}$  sont des paramètres qui dépendent, comme le coefficient  $b$  de la loi d'écrouissage isotrope, de la non-proportionnalité du chargement.  $\dot{\epsilon}_{(i)}^p$  est la vitesse de déformation plastique écrite dans le repère mobile. Cette dérivée de la déformation plastique est une dérivée corotationnelle, c'est-à-dire telle que :

$$\dot{\epsilon}_i^p = Q_{ij}\dot{\epsilon}_j^p + \dot{Q}_{ij}\epsilon_j^p \quad (2.66)$$

Néanmoins, en supposant que la rotation du repère mobile est plutôt lente, Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96] proposent de simplifier cette expression et d'écrire seulement :

$$\dot{\epsilon}_i^p = Q_{ij}\dot{\epsilon}_j^p \quad (2.67)$$

Le choix d'une évolution de  $d_{(i)}$  en fonction de  $\dot{\epsilon}_{(i)}^p$  et non de  $\dot{\epsilon}_i^p$ , contrairement à l'évolution de la variable  $\underline{X}$ , se justifie facilement en prenant l'exemple d'un chargement proportionnel selon une direction différente de l'un des vecteurs de base de l'espace des déviateurs (Fig. 2.19(b)). Pour faire apparaître une distorsion du domaine d'élasticité dans la direction du point de chargement seulement, il suffit d'orienter le premier vecteur de base du repère mobile,  $\underline{\hat{w}}_1$ , dans cette direction et de ne faire varier que la distorsion  $d_{(1)}$ <sup>18</sup>. Le chargement étant proportionnel, le taux de déformation plastique sera colinéaire au vecteur chargement  $\underline{\dot{S}}$  et donc au vecteur de base  $\underline{\hat{w}}_1$ , d'où le choix de  $\dot{\epsilon}_{(1)}^p$  pour piloter la variable  $d_{(1)}$ . Une autre façon, peut-être plus simple, de voir les choses est de considérer que les variables  $d_{(i)}$  sont les coordonnées des hypersphères dans le repère mobile et que par conséquent il est judicieux de choisir pour leur évolution un terme moteur qui soit lui aussi écrit dans ce repère mobile.

**2.2.3.3.2.4 Rotation  $Q_{ij}$  du repère mobile** Il s'agit là d'un point délicat, étant donné que peu d'informations expérimentales sont disponibles concernant la rotation des surfaces seuil. On peut néanmoins dire que les surfaces tournent, avec un certain

18. C'est-à-dire décaler la première hypersphère sur son axe de référence.

retard, pour suivre le point de chargement actuel. Dans le cas simplifié d'un chargement 2D, l'unique rotation possible du repère mobile peut être décrite par :

$$\dot{\phi} = C_{\phi}(\phi_M - \phi)\dot{p} \quad (2.68)$$

avec  $\phi_M$  l'angle donné par le point de chargement actuel. Le même type d'équation peut être proposé avec les angles d'Euler dans le cas d'un chargement 3D.

Cependant, pour des chargements dont la description nécessite plus de 3 directions indépendantes, il devient délicat de continuer dans cette voie. Les auteurs proposent alors de décrire la rotation du repère mobile par une loi d'évolution directement écrite sur la matrice orthogonale  $Q_{ij}$  et du type :

$$\dot{Q}_{ij} = \Omega_{ik}Q_{kj} \quad (2.69)$$

avec  $\Omega_{ik}$  une matrice antisymétrique appelée "tenseur de vitesse angulaire". Cette équation d'évolution garantit que la matrice  $Q_{ij}$  reste orthogonale. Kurtyka et Życzkowski proposent le principe suivant pour construire  $\Omega_{ik}$  :

$$\Omega_{ij} = C'_{\phi} [\underline{m}_1 \otimes \underline{m}_2 - \underline{m}_2 \otimes \underline{m}_1] \dot{p} \quad (2.70)$$

avec  $\underline{m}_1$  et  $\underline{m}_2$  deux vecteurs qui devront être colinéaires pour tout chargement proportionnel, de telle sorte que  $\Omega_{ij} = 0 \forall (i, j)$  et donc d'après (2.69)  $\dot{Q}_{ij} = 0 \forall (i, j)$ . Dans [Kurtyka et Życzkowski 96], le choix de ces vecteurs parmi les candidats répondant à cet impératif reste en suspens. Notons en outre que lors d'un chargement non-proportionnel, ces vecteurs ne devront plus être colinéaires de façon à pouvoir faire tourner le repère mobile et si possible dans la direction désirée.

**2.2.3.3.2.5 Multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$**  Kurtyka et Życzkowski détaillent le calcul du multiplicateur plastique  $\dot{\lambda}$  qui intervient dans l'équation suivante :

$$\dot{\epsilon}_i^p = \dot{\lambda} n_{Fi} \quad (2.71)$$

avec  $n_{Fi}$  la normale unitaire au domaine d'élasticité distordu défini par l'équation (2.59), et telle que :

$$n_{Fi} = \frac{\frac{\partial F}{\partial S_i}}{\sqrt{\frac{\partial F}{\partial S_k} \frac{\partial F}{\partial S_k}}} \quad (2.72)$$

$\dot{\lambda}$  est obtenu grâce à la condition de cohérence suivante :

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial S_j} \dot{S}_j + \frac{\partial F}{\partial R_i} \dot{R}_i + \frac{\partial F}{\partial X_i} \dot{X}_i + \frac{\partial F}{\partial d_i} \dot{d}_i + \frac{\partial F}{\partial Q_{ij}} \dot{Q}_{ij} = 0 \quad (2.73)$$

dans laquelle on injecte les lois d'évolution des différentes variables internes écrites en fonction du taux de déformation plastique cumulée  $\dot{p} = \sqrt{\dot{\epsilon}_i^p \dot{\epsilon}_i^p} = \dot{\lambda}$ . Nous ne détaillons

pas davantage les calculs ici et renvoyons le lecteur à [Kurtyka et Życzkowski 96]. On peut cependant noter deux différences majeures entre ce modèle à distorsion et un modèle basé sur un domaine classique de von Mises. Tout d'abord, la normale au domaine d'élasticité n'est plus simplement un rayon partant du centre de la surface seuil comme c'est le cas pour le domaine de von Mises où :

$$\underline{n}_{F\text{ Mises}} = \frac{\underline{S} - \underline{X}}{\|\underline{S} - \underline{X}\|} \quad (2.74)$$

La seconde différence concerne la présence d'une matrice de rotation  $Q_{ij}$  dans le modèle à distorsion. Cette matrice est considérée comme une matrice de variables internes d'après l'équation (2.73) et cet élément nouveau par rapport à un modèle construit à partir du domaine de von Mises complexifie et alourdit les calculs au niveau du multiplicateur plastique mais aussi au niveau de la loi d'évolution des termes de cette matrice de rotation. En effet, comme nous le verrons dans le chapitre 4, une procédure d'intégration particulière est nécessaire pour toujours garantir l'orthogonalité de cette matrice.

### 2.2.4 Bilan des modèles à distorsion

Un certain nombre de modèles dédiés à la description de la distorsion du domaine d'élasticité ont été présentés dans ce chapitre. Il est intéressant de noter la diversité des approches adoptées pour obtenir des résultats somme toute peu différents les uns des autres. Certains auteurs ont tiré parti de la dissymétrie obtenue grâce à des polynômes du déviateur des contraintes d'ordre 3 alors que d'autres sont partis de considérations purement géométriques (équations polaires par exemple).

Il ressort de cette étude que la majorité des auteurs se sont focalisés sur la forme de distorsion du domaine d'élasticité la plus répandue, à savoir celle d'un "œuf". Il fallait être capable de décrire à la fois le domaine isotrope de von Mises et cette forme distordue particulière. Malheureusement, l'étude de la distorsion du domaine d'élasticité n'a d'intérêt que pour des trajets de chargement non-proportionnels, car c'est au cours de tels trajets que l'effet de la distorsion sur l'instant d'entrée en plasticité et sur la normale au domaine d'élasticité peut jouer un rôle<sup>19</sup>. Or, la distorsion générée lors de trajets non-proportionnels présente généralement une forme différente et moins sympathique que celle d'un "œuf" (Fig. 2.8). La plupart des modèles, à part peut être celui de Boucher et Cordebois [Boucher et Cordebois 91], ne sont alors plus capables de décrire ces formes particulières. Par conséquent, de nouveaux développements sont nécessaires.

D'autre part, à ma connaissance, aucun auteur ne propose une identification complète de son modèle à la fois sur les courbes de comportement ( $\varepsilon - \sigma$ ) et sur les détections de surfaces seuil. Il est vrai que peu de travaux expérimentaux ont été réalisés en ce

19. Lors de trajets uniaxiaux, la direction d'écoulement plastique reste colinéaire au déviateur des contraintes, quelle que soit la distorsion du domaine d'élasticité.



sens, et les détections de surfaces seuil sont souvent présentées sans les courbes de comportement qui vont de pair. Cela est dommage car l'objectif de la modélisation de la distorsion du domaine d'élasticité est d'améliorer la prévision du comportement mécanique. C'est donc sur ce point que l'on peut juger au final de la qualité d'un modèle. A cet égard, Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96] proposent un cadre détaillé dans lequel des équations d'évolution "classiques" en mécanique des matériaux métalliques peuvent être introduites.

Nous recensons dans le tableau (2.1) les potentialités "géométriques" des modèles présentés précédemment ainsi que leur capacité à décrire le comportement de matériaux métalliques (en terme de courbes  $(\varepsilon - \sigma)$ ) sous chargement multiaxial non-proportionnel. Compte tenu de notre objectif, l'essentiel de notre travail a donc porté sur l'amélioration d'un des résultats de la dernière colonne de ce tableau. Nous avons retenu le modèle de Kurtyka et Życzkowski car ce dernier peut décrire des formes plus complexes que celle issue d'un essai uniaxial tout en conservant le formalisme standard des modèles élastoplastiques développés pour décrire le rochet multiaxial. L'effort à fournir pour intégrer la distorsion dans ces derniers modèles semble donc minimum si l'on retient le cadre d'analyse proposé par [Kurtyka et Życzkowski 96].

Modèles	Formes de la surface seuil				Lois d'évolution pertinentes pour décrire le comportement ( $\varepsilon - \sigma$ ) du matériau et les formes des surfaces seuil sous chargement multiaxial non-proportionnel	
	Forme d'œuf	Direction indépendante de $\underline{X}$	Formes complexes	Simplicité	monotone	cyclique
[Rees 83] [François 01]	+	- -	- -	++	+	- -
[Rousset 85]	+	-	- -	+	+	- -
[Gupta et Meyers 92] [Gupta et Meyers 94]	+	+	++	-	- -	- -
[Boucher et Cordebois 91]	+	++	+++	- -	-	- -
[Ortiz et Popov 83]	+	++	++	-	-	- -
[Kurtyka et Życzkowski 85] [Kurtyka et Życzkowski 96]	+	++	+	-	+	- -

TAB. 2.1 – Capacité des différents modèles à distorsion à représenter certaines formes distordues de surfaces seuil et à représenter le comportement de matériaux métalliques sous chargement non-proportionnel

# Chapitre 3

## Amélioration de la description du phénomène de rochet 2D par la prise en compte de la distorsion du domaine d'élasticité

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>3.2</b>	<b>Version simplifiée proposée par Kurtyka et Życzkowski</b>	<b>90</b>
3.2.1	Nouvelles lois d'évolution pour le modèle à distorsion	90
3.2.2	Formulation viscoplastique du modèle	94
3.2.3	Identification du modèle à distorsion avec un modèle polycristallin	97
3.2.4	Etude de l'évolution de la distorsion lors d'un trajet de rochet 2D	103
3.2.5	Bilan	110
<b>3.3</b>	<b>Modification du modèle à distorsion</b>	<b>112</b>
3.3.1	Une nouvelle simplification du modèle [Vincent <i>et al.</i> 01a] [Vincent <i>et al.</i> 01b]	112
3.3.2	Étude de la convexité de la surface seuil	114
3.3.3	Cadre viscoplastique	121
3.3.4	Identification du nouveau modèle à distorsion avec le modèle polycristallin	121
3.3.5	Identification du modèle à distorsion avec un acier inoxydable 316L	130
3.3.5.1	Présentation du matériau	130
3.3.5.2	Prise en compte du phénomène de surécrouissage	130
3.3.5.3	Bilan des équations du modèle et analyse des résultats	131

<b>3.4 Conclusion . . . . .</b>	<b>138</b>
---------------------------------	------------

---

## 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté certains travaux expérimentaux mettant en évidence les distorsions possibles du domaine d'élasticité suite à un chargement plastique. Nous avons également recensé plusieurs modèles plus ou moins capables de représenter ces phénomènes et nous avons finalement retenu le modèle proposé par Kurtyka et Życzkowski [Kurtyka et Życzkowski 96]. Le principe de construction ainsi que les variables du modèle ont été introduits dans le précédent chapitre. Nous ne présentons ici que les modifications que nous avons apportées à ce modèle, notamment en termes de lois d'évolution des variables internes.

Le modèle de Kurtyka et Życzkowski est relativement complexe dans sa version la plus générale. Il comprend par exemple vingt-cinq variables de distorsion dans le cas de chargements multiaxiaux quelconques. Ce nombre très élevé de variables n'est pas justifié, dans la mesure où Kurtyka [Kurtyka 88] a montré que leur modèle pouvait décrire des formes diverses de surfaces seuil expérimentales avec un nombre plus limité de variables (5 au lieu de 25). Nous avons donc choisi cette dernière version simplifiée du modèle comme base de notre travail.

Pour juger de la pertinence des lois d'évolution implantées dans le modèle, nous avons suivi une démarche *ad hoc*. Nous avons utilisé le modèle polycristallin présenté en (1.3.2), qui est très prédictif du point de vue du comportement du matériau et qui prévoit également les distorsions du domaine d'élasticité, bien que cette notion soit très macroscopique. Le modèle polycristallin nous est donc apparu comme l'outil idéal pour construire un nouveau modèle macroscopique, dans la mesure où nous pouvons réaliser avec cet outil autant d'"essais virtuels" que nécessaires pour l'identification et la validation des lois macroscopiques. L'intérêt majeur de cette démarche "hiérarchique"<sup>1</sup> est un gain de temps et d'argent puisque nous pouvons ainsi limiter le nombre d'essais sur matériaux réels.

Par exemple, nous verrons que le modèle à distorsion, tel qu'il a été présenté jusqu'ici, présente des failles et que l'utilisation du modèle polycristallin nous a permis de plus facilement les mettre en évidence. En outre, les résultats de certaines simulations faites avec ce modèle nous ont également fourni une piste pour améliorer le modèle macroscopique. Dans la suite du chapitre, nous proposons donc une nouvelle simplification du modèle macroscopique qui tire parti, à la fois des possibilités du modèle à distorsion dans sa version générale, mais également des observations faites sur les résultats fournis par le modèle polycristallin. Cette nouvelle version du modèle est ensuite identifiée sur les résultats numériques du modèle polycristallin et sur des résultats expérimentaux obtenus avec un matériau réel. Dans les deux cas, la prévision du modèle à distorsion est satisfaisante.

Enfin, nous nous limitons dans ce chapitre au cas de chargements biaxiaux. L'extension à des chargements de dimension supérieure nécessite une nouvelle loi pour la rotation du repère mobile et fera l'objet du prochain chapitre.

---

1. Terme utilisé dans [Erieau *et al.* 00]

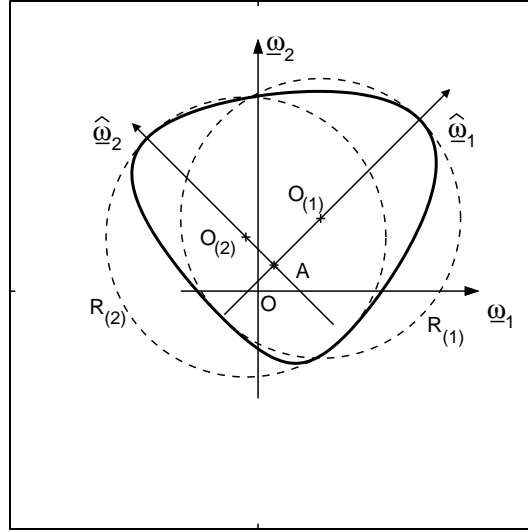


FIG. 3.1 – Surface seuil obtenue avec la version simplifiée du modèle de Kurtyka et Życzkowski

## 3.2 Utilisation de la version simplifiée du modèle proposée par Kurtyka et Życzkowski

### 3.2.1 Nouvelles lois d'évolution pour le modèle à distorsion

Nous rappelons l'équation de la surface seuil (2.59) du modèle simplifié proposé par Kurtyka et Życzkowski, dans le cas de chargements biaxiaux dans l'espace des déviateurs :

$$F = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{S}_{(i)}^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)}\hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2} \right) - 1 = 0 \quad (3.1)$$

avec  $\hat{S}_i$  les “contraintes actives” ou coordonnées du vecteur  $\underline{S} - \underline{X}$  dans le repère mobile  $(A, \underline{\hat{w}}_1, \underline{\hat{w}}_2)$  et  $d_{(i)}$ , la translation du cercle de centre  $O_{(i)}$  et de rayon  $R_{(i)}$  sur l'axe  $\underline{\hat{w}}_{(i)}$  du repère mobile. Un exemple de surface seuil est représenté sur la figure 3.1.

Le modèle à distorsion doit être au minimum capable de décrire le phénomène de rochet uniaxial. Par conséquent, nous choisissons de prendre 3 variables d'écrouissage cinématique non-linéaire qui décrivent chacune une zone particulière de la courbe de traction monotone [Chaboche 91]. Ainsi, la première est responsable du coude à la transition élastoplastique et la troisième représente l'écrouissage quasiment linéaire pour des déformations “importantes” ( $> 2\%$ ), tandis que la seconde permet de décrire le comportement entre ces deux régimes. Chaque comportement peut en effet être attribué principalement à l'une ou l'autre des variables d'écrouissage selon les valeurs données aux modules d'écrouissage et aux niveaux de saturation dans les équations

d'évolution de ces variables<sup>2</sup>.

D'après certaines observations expérimentales de détections de surfaces seuil [Rousset 85], la distorsion du domaine d'élasticité est un phénomène "rapide", c'est-à-dire qu'il apparaît pour de faibles niveaux de déformation et tend à saturer au cours du chargement plastique. Pour cette raison, nous choisissons d'attribuer aux variables de distorsion l'évolution du premier écrouissage cinématique décrit précédemment (responsable du "coude" à la transition entre le régime élastique et plastique). Les deux variables d'écrouissage cinématique suivantes sont choisies comme étant des vecteurs translation du repère mobile et sont notées  $\underline{X}_{(2)}$  et  $\underline{X}_{(3)}$ .

Nous avons fait le choix de prendre un jeu de coefficients différent pour les variables  $d_{(1)}$  et  $d_{(2)}$ . Ce choix se justifie par le fait que le repère mobile est toujours orienté de telle sorte que l'axe  $\hat{\underline{u}}_1$  soit le plus proche possible du point de chargement. Par conséquent, l'évolution de la variable  $d_{(2)}$  n'a lieu que pour des trajets non-proportionnels au cours desquels de nouveaux systèmes de glissements sont activés et interagissent dans le matériau, ce qui peut modifier l'écrouissage de celui-ci (phénomène de sur-écrouissage).

Enfin, nous choisissons pour toutes ces variables d'écrouissage cinématique des lois d'évolution inspirées de [Ohno et Wang 93] :

$$\dot{d}_{(1)} = C_{(1)1} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_1^p - \left( \frac{|d_{(1)}|}{R_{(1)}/\gamma_{(1)1}\Phi_{(1)1}(p)} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)}}{|d_{(1)}|} \dot{p} \right) \quad (3.2)$$

$$\dot{d}_{(2)} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_2^p - \left( \frac{|d_{(2)}|}{R_{(2)}/\gamma_{(1)2}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(2)}}{|d_{(2)}|} \dot{p} \right) \quad (3.3)$$

et

$$\dot{X}_{(n)i} = C_{(n)} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_i^p - \left( \frac{\|\underline{X}_{(n)}\|}{1/\gamma_{(n)}\Phi_{(n)}(p)} \right)^{m_{(n)}+1} \frac{X_{(n)i}}{\|\underline{X}_{(n)}\|} \dot{p} \right) \text{ avec } n = 2,3 \quad i = 1,2 \quad (3.4)$$

avec  $C_{(1)1}, C_{(1)2}, C_{(2)}, C_{(3)}, \gamma_{(1)1}, \gamma_{(1)2}, \gamma_{(2)}, \gamma_{(3)}, m_{(1)1}, m_{(1)2}, m_{(2)}$  et  $m_{(3)}$  des coefficients dépendant du matériau.

Les lois d'évolution que nous avons retenues ont des termes de rappel qui ne dépendent pas de la non-proportionnalité du chargement, contrairement à celles retenues dans les modèles proposés dans [Ohno et Wang 93], [Delobelle *et al.* 95] et [Jiang et Sehitoglu 96]. Cela nous permet d'estimer l'apport de la distorsion puisque de telles équations d'évolution, lorsqu'elles sont appliquées uniquement à des translations du domaine d'élasticité (variables  $\underline{X}_{(i)}$ ), sont inadaptées à la modélisation du rochet multiaxial, mais efficaces pour le rochet uniaxial. Les fonctions  $\Phi_{(1)1}(p)$  et  $\Phi_{(n)}(p)$  permettent de rendre compte du phénomène d'écrouissage cyclique [Marquis 79] en modulant l'amplitude du terme de rappel en fonction de la déformation plastique cumulée  $p = \int \dot{p} dt$

2. La première variable aura un fort module d'écrouissage et un faible niveau de saturation, la troisième, au contraire, un faible module d'écrouissage et un fort niveau de saturation.

avec  $\dot{p} = \sqrt{\dot{\varepsilon}_i^p \dot{\varepsilon}_i^p}$  :

$$\varphi_{(1)1}(p) = \varphi_{(1)1\infty} + (1 - \varphi_{(1)1\infty})e^{-\omega p}, \quad \varphi_{(n)}(p) = \varphi_{(n)\infty} + (1 - \varphi_{(n)\infty})e^{-\omega p} \quad (3.5)$$

avec  $\varphi_{(1)1\infty}, \varphi_{(2)\infty}, \varphi_{(3)\infty}$  et  $\omega$  des coefficients dépendant du matériau. La condition de définition de la surface seuil  $|d_{(i)}| < R_{(i)}$  est assurée par les équations (3.2) et (3.3) à condition de choisir  $\varphi_{(1)1\infty}\gamma_{(1)1} > 1$  et  $\gamma_{(1)2} > 1$ . Les paramètres dépendant du matériau  $C_{(1)1}, C_{(n)}, \gamma_{(1)1}$  et  $\gamma_{(n)}$  sont identifiés à partir d'un essai de traction et les fonctions  $\varphi_{(1)1}(p)$  et  $\varphi_{(n)}(p)$  sont identifiées sur des essais d'écroutissage cyclique. Les paramètres  $m_{(1)1}$  et  $m_{(n)}$  sont quant à eux identifiés sur des essais de rochet uniaxial. En ce qui concerne la taille du domaine d'élasticité, les rayons  $R_{(1)}$  et  $R_{(2)}$  suivent les équations d'évolution suivantes :

$$\dot{R}_{(1)} = b(R_{\infty} - R_{(1)})\dot{p}, \quad \dot{R}_{(2)} = (1 + \delta)\dot{R}_{(1)} \quad (3.6)$$

avec  $R_{\infty}$  la valeur asymptotique de l'écroutissage isotrope qui pourra dépendre de la non-proportionnalité du chargement [Benallal et Marquis 88], [Benallal *et al.* 89], [Tanaka 94] et [Calloch 97].

Dans le cas particulier (mais néanmoins très rencontré dans la littérature) de chargements biaxiaux, une seule variable suffit pour orienter le repère mobile par rapport au repère fixe, à savoir l'angle  $\phi = (\underline{\omega}_i, \underline{\omega}_i)$  existant entre un axe du repère fixe et l'axe de même indice du repère mobile. Kurtyka et Życzkowski proposent de faire évoluer cette variable de la façon suivante :

$$\dot{\phi} = C_{\phi}(\Delta\phi)\dot{p} \quad (3.7)$$

avec  $\Delta\phi = (\underline{\omega}_1; \underline{OM})$  l'écart angulaire entre le premier vecteur de base du repère mobile,  $\underline{\omega}_1$ , et le vecteur position du point de chargement actuel,  $\underline{OM}$ , de coordonnées  $(S_1, S_2)$  dans le repère fixe. L'équation (3.7) peut ainsi s'écrire :

$$\dot{\phi} = C_{\phi}(\phi_M - \phi)\dot{p} = C_{\phi}\left(\arctan \frac{S_2}{S_1} - \phi\right)\dot{p} \quad (3.8)$$

où la valeur initiale de  $\phi$  est déterminée par la direction du premier point d'entrée en plasticité.

Cette équation s'appuie sur des résultats expérimentaux de détections de surfaces seuil réalisées au cours d'un chargement monotone non-proportionnel (sans décharge élastique) par Bui [Bui 66] (Fig. 3.2). Au cours d'un tel trajet de chargement, les surfaces seuil semblent tourner, avec un certain retard, vers le point de chargement actuel. Ainsi, d'après l'équation (3.8), le premier axe du repère mobile  $\underline{\omega}_1$  tourne vers le point courant avec un retard contrôlé par le paramètre matériau  $C_{\phi}$  jusqu'à ce que  $\underline{\omega}_1$  soit orienté dans la direction du point de chargement ( $\Delta\phi = 0$ ). Dès lors, il suffit que la variable de distorsion  $d_{(1)}$  soit non nulle pour que la direction de la distorsion de la surface seuil



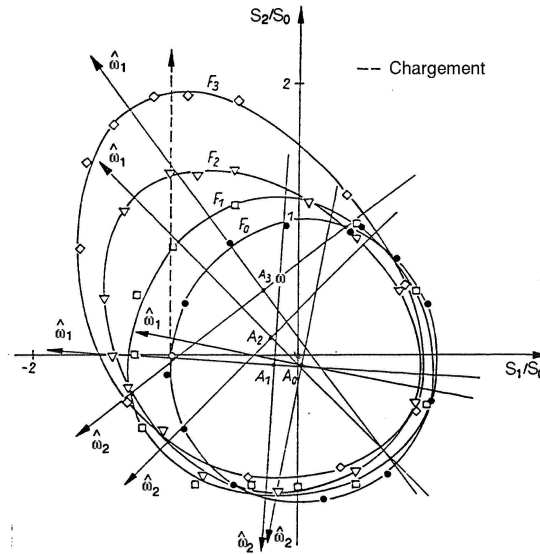


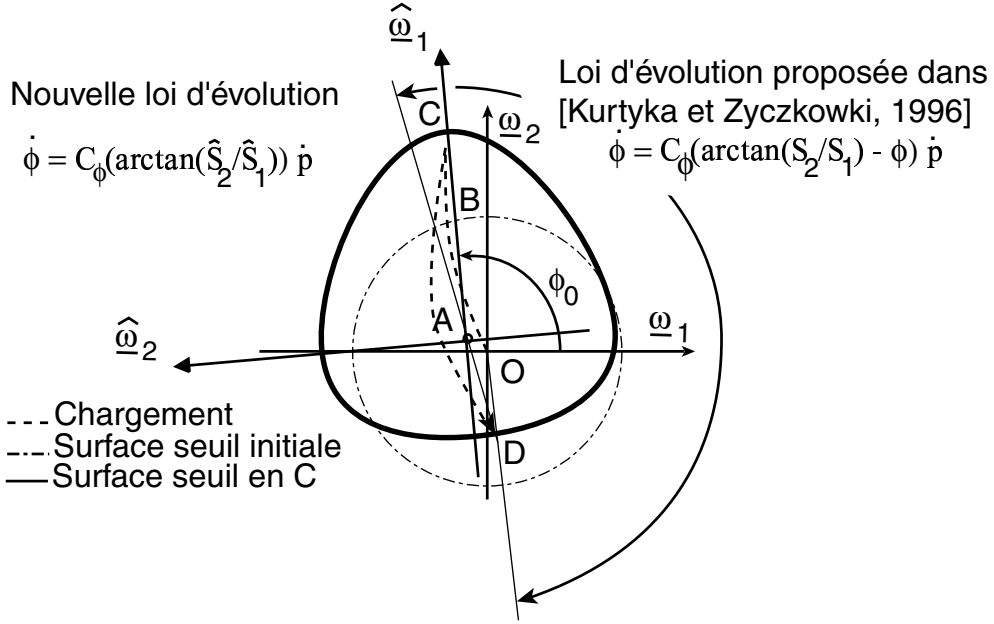
FIG. 3.2 – Identification du modèle à distorsion proposé par [Kurtyka et Życzkowski 96] sur des surfaces seuil obtenues au cours d'un trajet monotone non-proportionnel (sans décharge élastique) par Bui [Bui 66]

suive apparemment le point de chargement.

L'équation (3.8) représente donc convenablement certaines observations expérimentales (Fig. 3.2), mais elle n'est cependant plus optimale dès que l'on considère des chargements cycliques. En effet, si l'on imagine une séquence classique plasticité - élasticité - plasticité, il faut être capable de décrire la rotation de la surface seuil quelle que soit la position de la dernière entrée en plasticité. Dans ce cas, il est plus pratique d'écrire l'écart angulaire entre  $\hat{\omega}_1$  et le vecteur position du point de chargement actuel en fonction des coordonnées du point de chargement dans le repère mobile et nous proposons l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{\phi} = C_{\phi}(\hat{\omega}_1; \underline{AM}) \dot{p} = C_{\phi} \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \dot{p} \quad (3.9)$$

Cette fois-ci, l'angle  $\phi$  évolue jusqu'à ce que la composante  $\hat{S}_2$  du point de chargement disparaisse. Sur la figure 3.3 sont représentés un trajet de chargement possible ainsi que l'évolution correspondante de la variable  $\phi$  pour cette dernière loi d'évolution et pour celle proposée dans [Kurtyka et Życzkowski 96]. La surface seuil est obtenue lorsque le point de chargement est en C, avec  $\phi = \phi_0$ . Les flèches représentent l'évolution de  $\phi$  et sont tracées pour le cas où le point D est le nouveau point d'entrée en plasticité. On peut remarquer que la nouvelle loi d'évolution est conçue de telle sorte que la rotation soit aussi faible que possible, alors que la proposition de [Kurtyka et Życzkowski 96] conduirait à une rotation complète d'environ  $180^\circ$  pour le même trajet de chargement, ce qui ne paraît pas très convaincant d'un point de vue "physique". Dans notre cas, une

FIG. 3.3 – Lois d'évolution pour l'angle  $\phi$ 

pointe pourra se former au point D si l'on inverse le sens de la distortion sur l'axe  $\hat{\sigma}_1$  ( $d_{(1)} < 0$ ).

Les coefficients  $C_{\phi}$ ,  $C_{(1)2}$ ,  $\gamma_{(1)2}$ ,  $m_{(1)2}$  et  $\beta$  sont identifiés sur des essais de rochet biaxial.

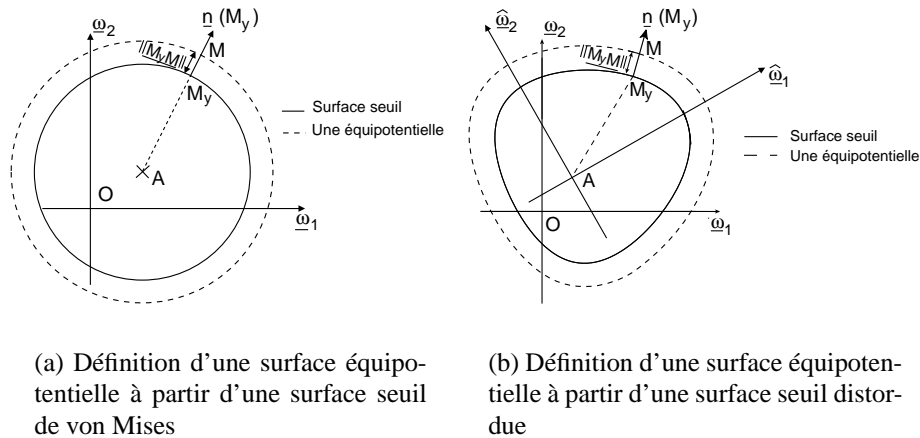
### 3.2.2 Formulation viscoplastique du modèle

Nous avons implanté le modèle à distortion dans le logiciel SiDoLo [Pilvin 94], en nous plaçant dans un cadre viscoplastique. L'intérêt de ce cadre est qu'il nous permet de décrire des comportements de matériaux qui dépendent de la vitesse de chargement, ce qui est le cas pour l'acier inoxydable utilisé dans cette étude. Toutefois, nous pouvons nous ramener à un comportement "plastique" (indépendant de la vitesse de chargement) en choisissant convenablement certains coefficients dépendant du matériau. De plus, les équations d'évolution sont fortement non-linéaires et nous avons noté une plus grande rapidité des calculs lorsque la condition de cohérence n'a pas à être vérifiée.

Dans le cadre viscoplastique, le point de chargement peut sortir du domaine d'élasticité et le taux de déformation viscoplastique est généralement directement fonction de la distance entre le point de chargement et le domaine d'élasticité. Les surfaces équipotentielles (ou surfaces d'iso-taux de déformation viscoplastique) sont alors des surfaces de même forme que le domaine d'élasticité mais de taille croissante avec le taux de déformation.

Si l'on utilise le domaine d'élasticité de von Mises qui s'écrit :

$$F = \sqrt{S'_i S'_i} - R = 0 \quad (3.10)$$



(a) Définition d'une surface équipotentielle à partir d'une surface seuil de von Mises

(b) Définition d'une surface équipotentielle à partir d'une surface seuil distordue

FIG. 3.4 – Influence de la forme de la surface seuil sur la définition des surfaces équipotentielles

alors la distance entre le point de chargement et la surface seuil est directement donnée par la valeur de  $F$ . Si  $F = 0$ , le point de chargement est sur la surface seuil ; si  $F > 0$  alors le point de chargement est en dehors de la surface seuil d'une distance égale à  $F$ . Les équipotentielles sont donc des hypersphères de même centre que la surface seuil et de rayon  $\sqrt{S_i^t S_i^t}$  (Fig. 3.4(a)). Le taux de déformation viscoplastique cumulée peut alors être obtenu directement par l'équation suivante :

$$\dot{p} = \left\langle \frac{F}{K} \right\rangle^n \quad (3.11)$$

avec  $K$  et  $n$  deux coefficients dépendant du matériau<sup>3</sup>.

Dans le cas d'une surface seuil distordue, les choses ne sont pas aussi simples. Tout d'abord, nous ne connaissons pas de résultats expérimentaux permettant de conclure quant à la forme et position des équipotentielles par rapport au domaine d'élasticité, pour des matériaux ayant subi un chargement mécanique (état non vierge). Nous sommes donc amenés à formuler une hypothèse : nous supposons que le taux de déformation viscoplastique est, comme dans le cas théorique précédent, directement fonction de la distance entre le point de chargement actuel et la surface seuil (Fig. 3.4(b)). Or, la surface seuil distordue ne possède pas de centre au sens d'un point équidistant de tous les points de la surface. Il est donc difficile d'effectuer l'homothétie d'une telle surface dont on ne connaît pas le centre. D'autre part, lorsqu'un point de chargement  $M$  sort d'une surface seuil distordue, le point  $M_y$  le plus proche de  $M$  et appartenant à la surface seuil n'est pas immédiat à trouver<sup>4</sup> (voir Fig. 3.4(b)).

3. On retrouve un comportement indépendant de la vitesse de chargement en prenant par exemple  $K = 10 \text{ MPa.s}^{1/n}$  et  $n = 24$  [Caillaud 87].

4. Dans le cas d'une hypersphère de von Mises, le point  $M_y$  appartient au rayon  $[A, M]$  où  $A$  est le

Dans notre cas, la surface seuil est définie par l'équation suivante :

$$F = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{S}_{(i)}^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)}\hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2} \right) - 1 = 0 \quad (3.12)$$

et la distance entre un point situé à l'extérieur de la surface seuil et cette dernière n'est pas égale à  $F$ . Nous sommes donc contraints de rechercher le point  $M_y$  situé sur la surface seuil et le plus proche de  $M$ , c'est-à-dire vérifiant simultanément :

$$\begin{cases} F(M_y) = 0 \\ \text{et} \\ \underline{n}(M_y) = \underline{kM_yM} \end{cases} \quad (3.13)$$

Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à trouver une solution analytique à ce problème. Nous avons donc dû utiliser une méthode numérique pour trouver  $M_y$ . Nous avons utilisé un algorithme qui minimise la distance entre les deux points  $M$  et  $M_y$ . Il s'agit d'une procédure HARWELL écrite en Fortran et qui permet de minimiser une fonction somme de carrés sans connaître la dérivée de cette fonction. Nous aurions pu utiliser une procédure semblable qui utilise la dérivée analytique (et non numérique) de la fonction, mais l'expression de cette dérivée est très complexe (surtout pour le cas de chargements 5D) et le gain en temps de calcul n'est donc pas si évident<sup>5</sup>. Cette recherche numérique du point  $M_y$  entraîne un coût de calcul supplémentaire, mais nous estimons que ce dernier reste raisonnable dans la mesure où nous pouvons fournir pour la minimisation un point de départ qui est proche de la solution finale. En effet, l'équation implicite de la surface seuil (3.1) découle d'une équation paramétrique (voir chapitre précédent) qui s'écrit (sans sommation sur les indices entre parenthèses) :

$$\hat{S}_i = \left\{ d_{(i)j}t_j + \left[ (d_{(i)j}t_j)^2 - d_{(i)j}d_{(i)j} + R_{(i)}^2 \right]^{1/2} \right\} t_i \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad (3.14)$$

avec  $t_1 = \cos \beta$  et  $t_2 = \sin \beta$ . En prenant le carré de cette expression, on a montré que l'on obtenait :

$$t_i = \frac{\hat{S}_i}{\sqrt{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)}\hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2}} \quad i = 1, 2 \quad (3.15)$$

Nous choisissons alors comme point de départ pour le processus de minimisation le point  $M_0$  (voir Fig. 3.5) qui vérifie cette dernière équation et donc appartient à la surface seuil, et qui a par ailleurs pour ordonnée dans le repère mobile la même ordonnée  $\hat{S}_2$  que le point de chargement actuel  $M$ , situé en dehors de la surface seuil. En fait, deux cas sont à envisager selon qu'il existe ou non un point de la surface seuil ayant

---

centre de la surface seuil.

5. L'optimisation du temps de calcul n'était de toute façon pas notre objectif principal.

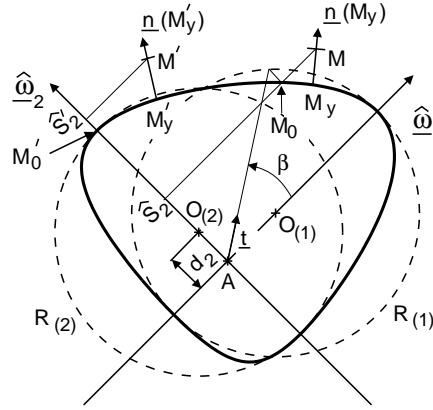


FIG. 3.5 – Point de départ ( $M_0$  ou  $M'_0$ ) pour le processus de minimisation

pour ordonnée  $\hat{S}_2$  :

$$\text{si } |\hat{S}_2 - d_2| > R_{(2)} \text{ alors } t_2 = \text{sign}(\hat{S}_2), \text{ et sinon } t_2 = \frac{\hat{S}_2}{\sqrt{R_{(2)}^2 + 2d_2\hat{S}_2 - d_2^2}} \quad (3.16)$$

Une fois le paramètre  $t_2$  choisi, nous en déduisons la valeur initiale correspondante pour l'angle  $\beta$  (Fig. 3.5) :

$$\beta = \arcsin(t_2) \text{ si } \hat{S}_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta = \pi - \arcsin(t_2) \text{ si } \hat{S}_1 < 0 \quad (3.17)$$

et c'est sur cet angle  $\beta$  que le processus de minimisation agit pour trouver le point final  $M_y$ .

L'hypothèse que nous avons faite sur la forme des équipotentielles est sujette à discussion, au même titre d'ailleurs que le choix de partitionner les déformations en déformation élastique et déformations anélastiques sans distinguer au sein de ces dernières les déformations viscoplastique et plastique. Ces discussions font d'ailleurs partie des perspectives de ce travail.

### 3.2.3 Identification du modèle à distorsion avec un modèle polycristallin

Nous passons maintenant à l'identification du modèle à distorsion dans sa version simplifiée proposée dans [Kurtyka et Życzkowski 96] et intégrant les nouvelles lois d'évolution présentées précédemment et rappelées dans le tableau 3.1. Nous identifions ce modèle vis-à-vis du modèle polycristallin développé par Cailletaud [Cailletaud 87]

---

Surface seuil	$F = \left( \sum_{i=1}^2 \frac{\hat{S}_{(i)}^2}{R_{(i)}^2 + 2d_{(i)}\hat{S}_{(i)} - d_{(i)}^2} \right) - 1 = 0$
Écrouissage Isotrope	$\dot{R}_{(1)} = b(R_\infty - R_{(1)})\dot{p}$ et $\dot{R}_{(2)} = (1 + \delta)\dot{R}_{(1)}$ avec $R_{(i)} = S_0$ à $t = t_0$
Écrouissage Cinématique	$\begin{cases} \dot{d}_{(1)} = C_{(1)1} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_1^p - \left( \frac{ d_{(1)} }{R_{(1)}/\gamma_{(1)1}\Phi_{(1)1}(p)} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)}}{ d_{(1)} } \dot{p} \right) \\ \dot{d}_{(2)} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_2^p - \left( \frac{ d_{(2)} }{R_{(2)}/\gamma_{(1)2}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(2)}}{ d_{(2)} } \dot{p} \right) \end{cases}$ avec $\Phi_{(1)1}(p) = \Phi_{(1)1\infty} + (1 - \Phi_{(1)1\infty})e^{-\omega p}$ $\dot{X}_{(n)i} = C_{(n)} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_i^p - \left( \gamma_{(n)}\Phi_{(n)}(p) \ \underline{X}_{(n)}\  \right)^{m_{(n)}+1} \frac{X_{(n)i}}{\ \underline{X}_{(n)}\ } \dot{p} \right) \quad n = 2, 3$ avec $\Phi_{(n)}(p) = \Phi_{(n)\infty} + (1 - \Phi_{(n)\infty})e^{-\omega p}$
Rotation du repère mobile	$\dot{\phi} = C_\phi \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \dot{p}$

---

TAB. 3.1 – Résumé des équations du modèle à distorsion, dans sa version simplifiée proposée par Kurtyka et Życzkowski

et Pilvin [Pilvin 90] (voir partie (1.3.2)). En effet, comme nous l'avons expliqué en introduction de ce chapitre, ce modèle polycristallin est suffisamment robuste pour qu'il ne soit pas utile d'identifier le modèle macroscopique sur des résultats réels tant que ce dernier n'est pas capable de prévoir les réponses du modèle micro-macro.

Etant donné que nous nous intéressons au comportement du matériau mais aussi aux distorsions du domaine d'élasticité, nous choisissons de prendre un maximum de grains pour le modèle polycristallin, soit 1000 grains, de façon à obtenir des détections de surfaces seuil les plus continues possibles [Cailletaud 87]. Enfin, nous reprenons les mêmes coefficients, pour le modèle polycristallin, que ceux obtenus par Pilvin et Geyer [Pilvin et Geyer 97] et reportés dans le tableau 1.2 de la partie (1.3.2).

Pour identifier les 25 coefficients du modèle, nous suivons la démarche résumée dans le tableau 3.2, où chaque étape permet d'identifier successivement un groupe de coefficients dépendant du matériau. Concernant la première étape d'identification, les coefficients qui pilotent l'évolution des variables d'écrouissage cinématique sont identifiés successivement en partant de "l'arrière" d'une courbe de traction ( $\epsilon > 1\%$ ), là où seul le troisième écrouissage cinématique n'est pas saturé et où le module d'écrouissage vaut donc  $C_{(3)}$ <sup>6</sup>. Ensuite, on "descend" la courbe (vers les plus faibles déformations) pour finir par la transition élastoplastique, où toutes les variables d'écrouissage ciné-

---

6. En supposant d'une part qu'il n'y a pas d'écrouissage isotrope en traction monotone sur ce "matériau" et d'autre part que la valeur de saturation du troisième écrouissage,  $(1/\gamma_{(3)}\Phi_{(3)}(p))$ , est nettement plus élevée que le niveau de contrainte que l'on souhaite décrire sur cet essai de traction.

Étapes d'identification	Paramètres dépendant du matériau	Essais
1	$E, \nu, S_0, C_{(1)1}, \gamma_{(1)1}, C_{(2)}, \gamma_{(2)}, C_{(3)}, \gamma_{(3)}, K, n$	Traction monotone avec différentes vitesses de chargement et avec des détections de surfaces seuil
2	$b, R_\infty, \omega, \phi_{(1)1\infty}, \phi_{(2)\infty}, \phi_{(3)\infty}$	Écrouissage cyclique uniaxial
3	$m_{(1)1}, m_{(2)}, m_{(3)}$	Rochet uniaxial
4	Tous les coefficients des étapes 1, 2 et 3	Tous les essais uniaxiaux
5	$C_\phi, \delta, C_{(1)2}, \gamma_{(1)2}, m_{(1)2}$	Rochet biaxial avec détections de surfaces seuil
6	Tous les coefficients	Tous les essais

TAB. 3.2 – *Stratégie d'identification du modèle à distorsion*

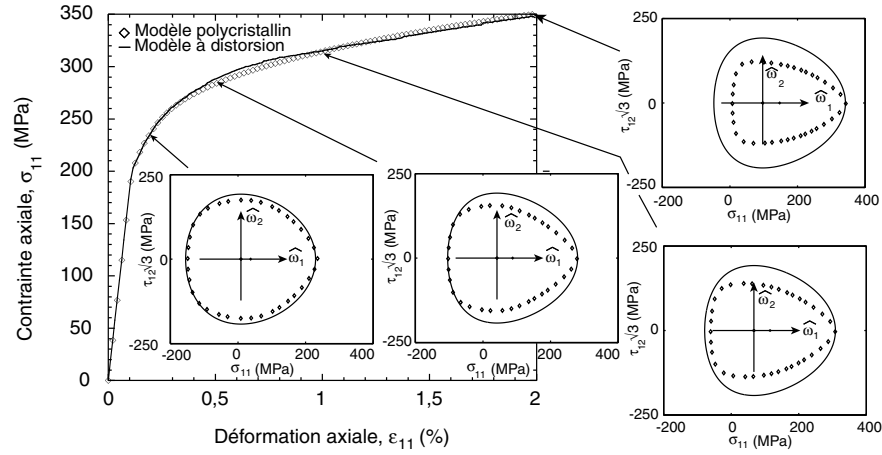


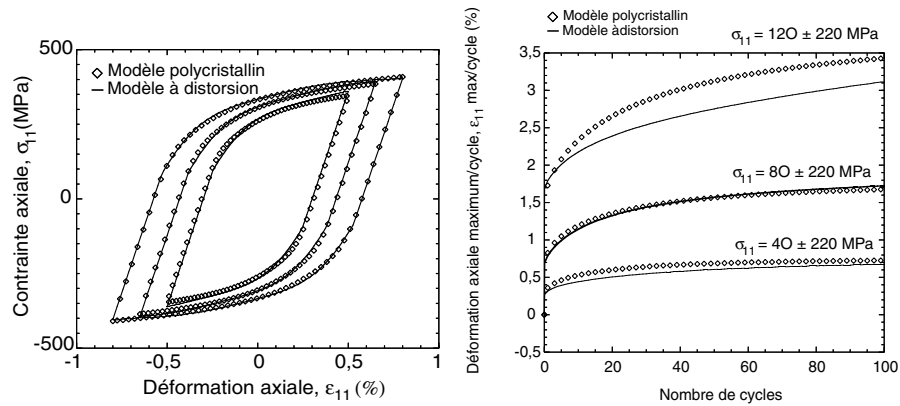
FIG. 3.6 – Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur une simulation de traction monotone

matique participent au module d'écrouissage du "matériau". D'autre part, toutes les simulations réalisées avec le modèle polycristallin sont faites pour une même vitesse de chargement, ce qui nous permet d'identifier une version du modèle à distorsion qui soit indépendante de la vitesse de chargement. Nous n'identifions donc pas les coefficients de viscosité  $K$  et  $n$  sur un essai à différentes vitesses de chargement (contrairement à ce que préconise la démarche illustrée dans le tableau 3.2). Ceci nous permet d'éviter certains problèmes liés à la prise en compte de la viscosité du matériau et dont nous reparlerons dans les perspectives de ce travail.

L'ordre des étapes présentées dans le tableau est important même s'il est clair que les coefficients identifiés dans une étape influent sur la réponse du modèle lorsque l'on simule à nouveau les essais des étapes précédentes. C'est pourquoi, cette démarche n'est suivie que pour obtenir un jeu de coefficients initial cohérent avant de lancer une identification complète du modèle, en utilisant par exemple tous les coefficients et tous les paramètres (étape 6). Toutefois, les paramètres de l'étape 5 n'ont aucune influence sur les résultats d'essais uniaxiaux (trois premières étapes). Par conséquent, il est judicieux de lancer une identification "semi-complète" (étape 4) avec tous les essais uniaxiaux et tous les coefficients des étapes 1, 2 et 3 avant de passer à l'étape 5.

Les résultats d'identification sur traction monotone, écrouissage cyclique uniaxial et rochet uniaxial sont présentés sur les figures 3.6, 3.7(a) et 3.7(b) respectivement. Le comportement prévu par le modèle à distorsion est en accord avec celui donné par le modèle polycristallin sur ces trois essais, ce qui n'est pas surprenant compte tenu des lois d'évolution que nous avons choisies. Des comparaisons de surfaces seuil sont présentées sur la simulation de traction monotone. On remarque qu'au cours d'un tel trajet monotone, le modèle polycristallin prévoit, comme c'est le cas sur matériaux réels, une diminution de la taille du domaine d'élasticité dans la direction de chargement. À ma connaissance en revanche, la diminution transverse du domaine également





(a) Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur des simulations d'écrouissage cyclique à amplitude de chargement croissante

(b) Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur des simulations de rochet uniaxial

FIG. 3.7 – Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur des simulations cycliques uniaxiales

prévue par ce modèle n'a pas été mise en évidence expérimentalement. Elle peut donc être mise en doute.

Le modèle à distorsion quant à lui ne peut pas prévoir ce type de phénomène compte tenu de la loi d'évolution (3.6) retenue pour la variable d'écrouissage isotrope  $R_{(1)}$  et du fait que les simulations d'écrouissage cyclique uniaxial prévoient une augmentation de la taille du domaine d'élasticité. En effet, la valeur asymptotique  $R_{\infty}$  de  $R_{(1)}$  introduite dans l'équation (3.6) ne permet pas de décrire à la fois une diminution de  $R_{(1)}$  ( $R_{\infty} < S_0$ ) pour des trajets monotones et une augmentation de  $R_{(1)}$  ( $R_{\infty} > S_0$ ) pour des trajets cycliques. Nous n'avons cependant pas voulu complexifier inutilement le modèle à distorsion dans la mesure où nous sommes surtout intéressés par les trajets cycliques et que pour de tels trajets, le modèle polycristallin ne prévoit pas de diminution de la taille du domaine d'élasticité. Ce dernier point a été vérifié en comparant les surfaces seuil obtenues avec le modèle polycristallin lors du premier et du dernier cycle d'une simulation d'écrouissage cyclique (voir figure 3.8).

Après avoir identifié le modèle à distorsion sur des essais uniaxiaux, nous l'identifions sur un trajet de rochet 2D classique où la contrainte axiale est constante pendant que l'on cycle sur la déformation de cisaillement. Cet essai produit un léger écrouissage cyclique sur la voie de torsion, et du rochet sur la voie axiale du fait de la contrainte axiale constante (Fig. 3.9). Comme on peut le constater, la prévision du rochet multiaxial est très mauvaise avec le modèle à distorsion. Pour comparaison, nous avons aussi reporté la simulation du même trajet de chargement faite avec un modèle macroscopique phénoménologique basé sur un domaine d'élasticité de von Mises. Ce dernier

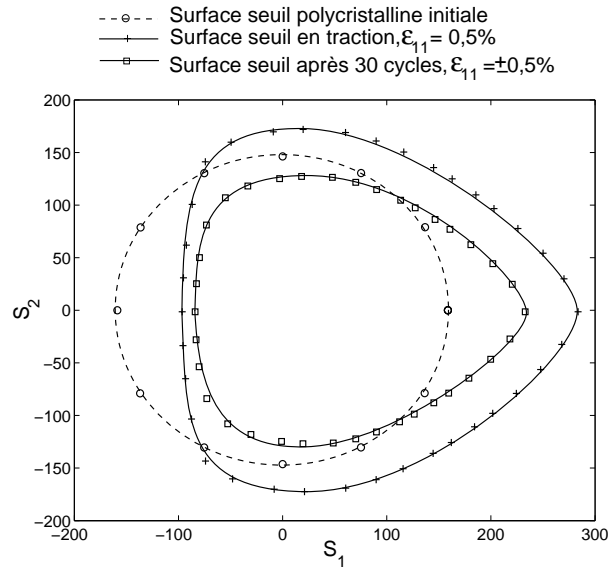


FIG. 3.8 – Évolution des surfaces seuil détectées avec le modèle polycristallin entre le premier et le dernier cycle d'une simulation d'écrouissage cyclique uniaxial, où  $\epsilon = \pm 0,5\%$

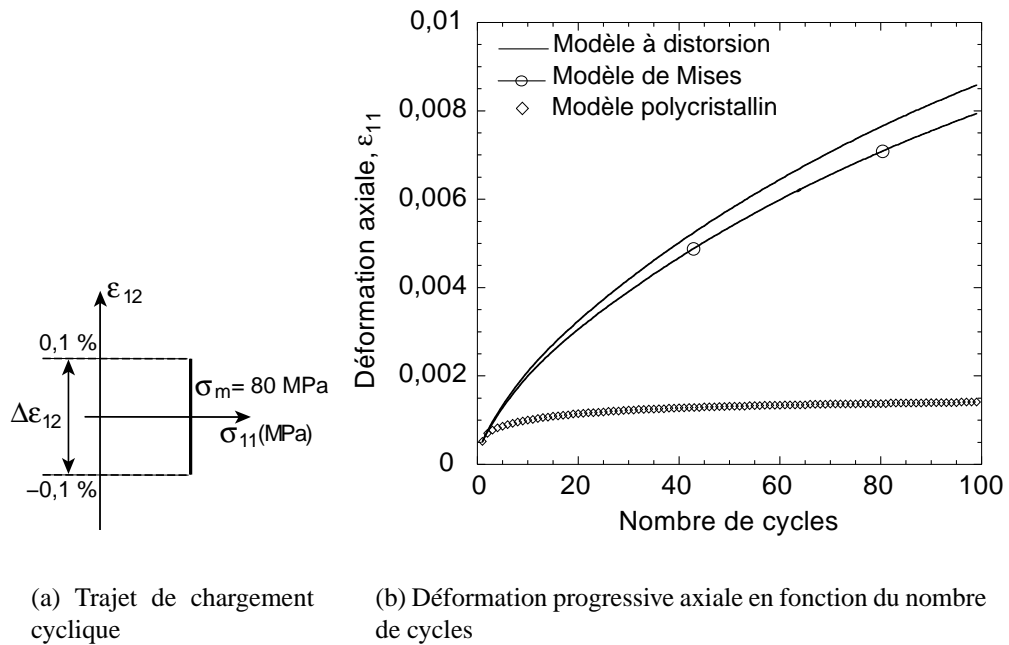


FIG. 3.9 – Identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin sur une simulation de rochet 2D. Simulation du même trajet avec le “modèle de Mises”

modèle contient les mêmes variables internes que le modèle à distorsion, excepté les variables de distorsion qui sont remplacées par des variables d'écrouissage cinématiques classiques ( $X_{(1)i}$ ) et les variables  $R_{(2)}$  et  $\phi$  qui disparaissent. Nous choisissons pour ce modèle, appelé rapidement "modèle de Mises", les mêmes lois d'évolution avec les mêmes valeurs de paramètres que pour le modèle à distorsion de façon à obtenir exactement les mêmes résultats avec les deux modèles macroscopiques sur les simulations uniaxiales. Les différences n'interviennent que pour des trajets multiaxiaux non-proportionnels comme celui proposé figure 3.9. Dans ce cas, on remarque que le modèle de Mises donne de meilleurs résultats que le modèle à distorsion, ce qui est un comble! Le modèle à distorsion est en effet censé améliorer la prévision de la direction de l'écoulement plastique grâce à la distorsion du domaine d'élasticité et, d'un point de vue pragmatique, il contient plus de paramètres matériau que le modèle de Mises<sup>7</sup>, ce qui pourrait améliorer sa qualité de façon trompeuse.

Ce premier résultat décevant nous pousse à étudier de plus près la distorsion de la surface seuil au cours d'un tel trajet [Vincent *et al.* 00].

### 3.2.4 Etude de l'évolution de la distorsion lors d'un trajet de rochet 2D

Nous avons tracé sur la figure 3.10 plusieurs surfaces seuil obtenues avec le modèle à distorsion au cours du dernier cycle de chargement de rochet 2D, entre les points  $B$  où  $\epsilon_{12} = \epsilon_{12max} = 0,1\%$  et  $C$  où  $\epsilon_{12} = \epsilon_{12min} = -0,1\%$ . Pour chacune de ces surfaces seuil, sont tracés :

- Le trajet de chargement,
- Le point de chargement obtenu avec le modèle à distorsion,
- La "surface seuil" détectée avec le modèle polycristallin au même niveau de chargement ( $\sigma_{11} - \epsilon_{12}$ ) que celui retenu pour le modèle à distorsion.

La première remarque que l'on peut faire est que le niveau de distorsion prévu par le modèle à distorsion est extrêmement faible puisque les deux centres  $O_{(1)}$  et  $O_{(2)}$  des deux cercles de construction sont très proches du centre du repère mobile. Nous avons d'ailleurs tracé sur la figure 3.11 les surfaces seuil obtenues pour le même niveau de chargement avec le modèle de Mises et l'on constate peu de différences entre le modèle à distorsion et ce dernier, ce qui explique que l'on obtienne quasiment les mêmes cinétiques de rochet.

On remarque que, tout au long du trajet plastique, la normale au domaine d'élasticité des modèles macroscopiques a toujours une composante axiale non nulle au point de chargement, ce qui explique l'accumulation de déformation plastique dans la direction de traction au cours des cycles. A l'inverse, les détections du domaine d'élasticité obtenues avec le modèle polycristallin donnent une normale au domaine d'élasticité

---

7. À savoir les paramètres  $C_{(1)2}, \gamma_{(1)2}$  et  $m_{(1)2}$  de la loi d'évolution de la distorsion  $d_{(2)}$  et le paramètre  $C_\phi$  de la loi de rotation du repère mobile.

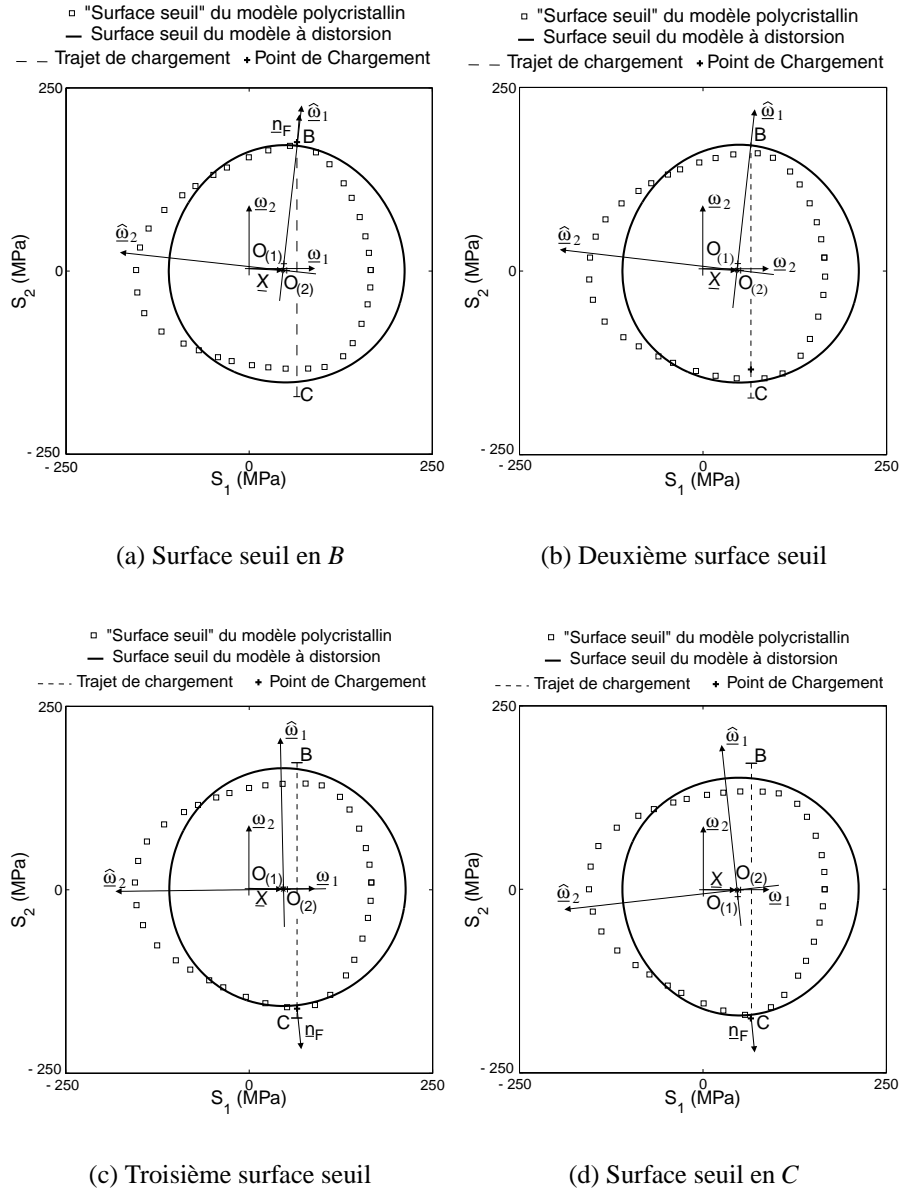


FIG. 3.10 – Évolution de la distortion au cours du dernier cycle d'un trajet de rochet 2D,  $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$

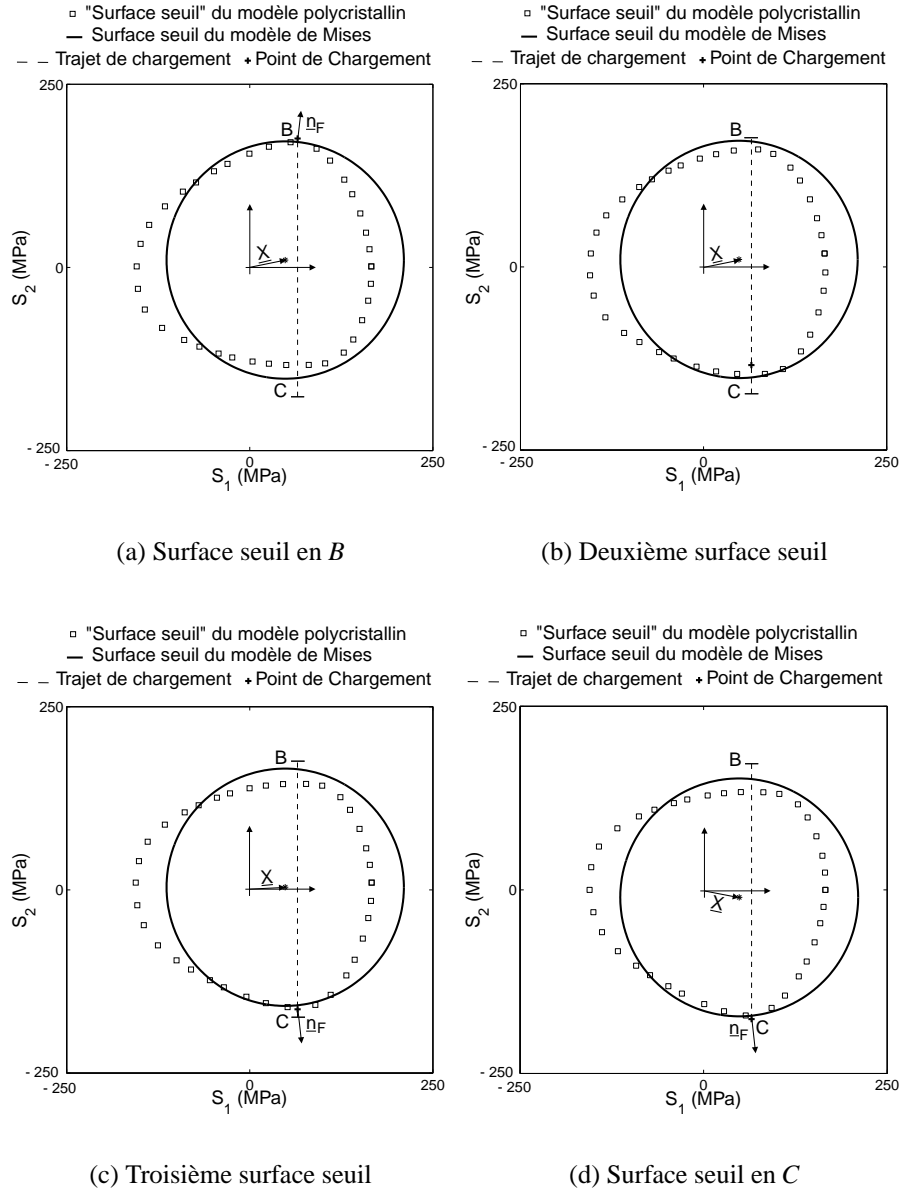


FIG. 3.11 – Évolution du domaine de Mises au cours du dernier cycle d'un trajet de rochet 2D,  $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_{12} = \pm 0,1\%$

orientée exclusivement dans la direction de cisaillement, du fait de la bosse formée au point de chargement. D'autre part, on note une différence très nette entre la position du domaine d'élasticité des modèles macroscopiques et celle du domaine détecté par le modèle polycristallin. Cela signifie qu'une différence de comportement très importante se produira entre les modèles macroscopiques et le modèle polycristallin si l'on suppose un changement de direction du chargement, comme, par exemple, une orientation de la sollicitation vers la compression pure (voir Fig. 3.12). Les trajets de

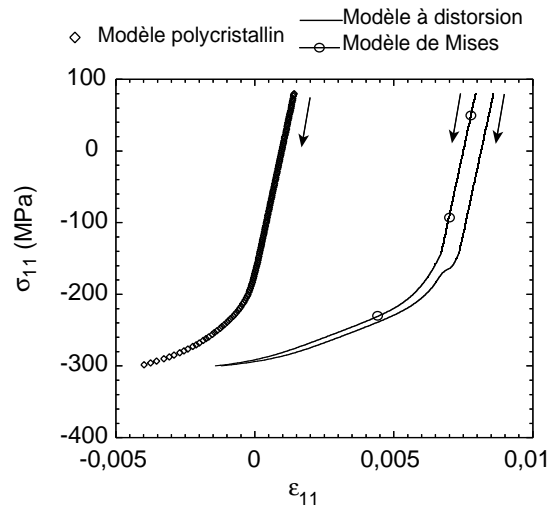


FIG. 3.12 – Simulation d'une compression pure ( $\epsilon_{12} = 0$ ) jusqu'à  $\sigma_{11} = -300$  MPa suite au trajet de rochet 2D précédent

chargement en contrainte - contrainte et les surfaces seuil finales des modèles macroscopiques obtenus dans ce cas sont comparés aux résultats du modèle polycristallin sur la figure 3.13. La surface seuil et le trajet en contrainte donnés par le modèle à distorsion sont en accord avec ceux du modèle polycristallin mais la réponse en déformation axiale est surestimée. Ce dernier résultat était prévisible étant donnée l'entrée précoce en plasticité prévue par le modèle macroscopique, mais il illustre bien la nécessité de juger les modèles à distorsion à la fois sur la forme des surfaces seuil *et* sur le comportement. A cet égard, le comportement prévu par le modèle de Mises est semblable à celui prévu par le modèle à distorsion.

On peut supposer que la prévision du comportement faite par le modèle polycristallin, y compris en termes d'évolution du domaine d'élasticité, est plus proche du comportement réel des matériaux que celle donnée par les modèles macroscopiques. Par conséquent, les modèles macroscopiques présentés ici ne semblent être en mesure de représenter ni la distorsion et la position du domaine d'élasticité ni la cinétique de rochet multiaxial.

Nous avons réalisé une nouvelle simulation de rochet 2D, avec le modèle à distorsion et le modèle polycristallin, sous une amplitude de cisaillement plus importante,  $\epsilon_{12} = \pm 0,2\%$ . Les coefficients dépendant du matériau restent inchangés par rapport

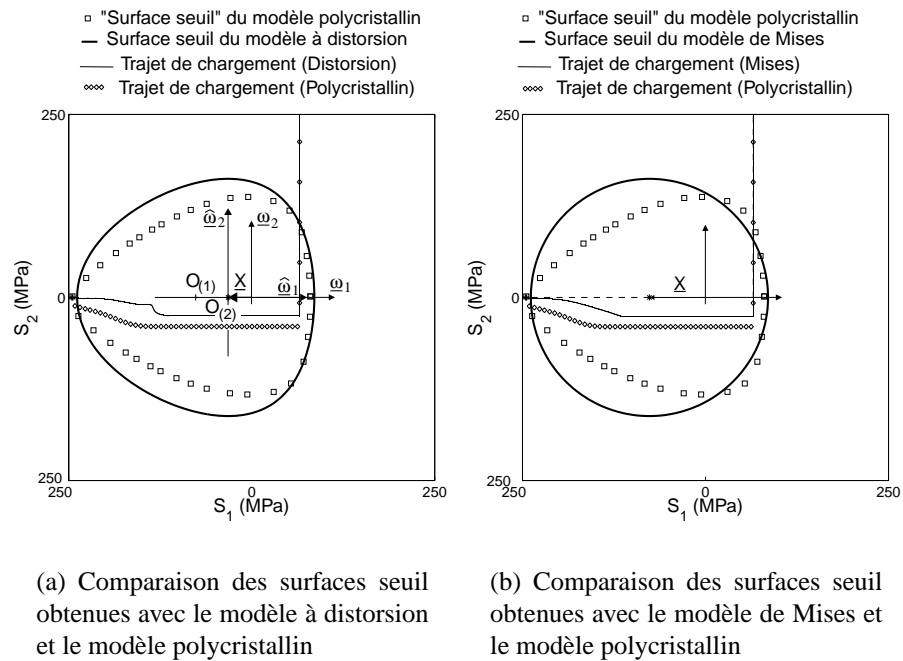


FIG. 3.13 – Comparaison entre les surfaces seuil obtenues avec les modèles macroscopiques et celle obtenue avec le modèle polycristallin suite à un trajet de rochet 2D, ( $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ,  $\epsilon_{12} = \pm 0,1\%$ ) et à une décharge en compression pure jusqu'à  $\sigma_{11} = -300 \text{ MPa}$

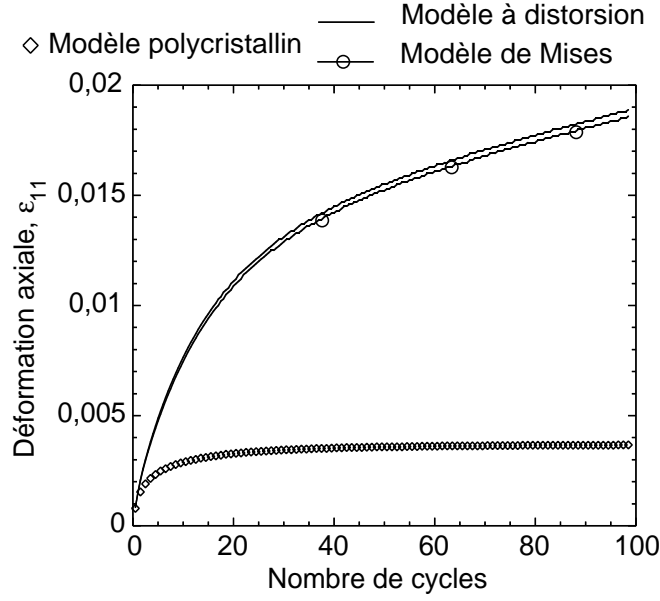


FIG. 3.14 – Comparaison entre les réponses des modèles macroscopiques et celle du modèle polycristallin sur une simulation de rochet 2D,  $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$

aux simulations précédentes. La comparaison entre le modèle à distorsion et le modèle polycristallin en termes de déformation progressive est présentée sur la figure 3.14 et des surfaces seuil obtenues au cours du dernier cycle de ce chargement sont reproduites sur la figure 3.15. On remarque que cette fois-ci, la distorsion “a le temps de se mettre en place” au cours du cycle (Fig. 3.15). Le modèle prévoit une distorsion en forme d’œuf, d’axe la direction de chargement. Néanmoins, la distorsion et la position du domaine d’élasticité ne correspondent pas à celles obtenues avec le modèle polycristallin. Enfin, la prévision de la déformation progressive n’est pas meilleure que pour l’essai de rochet 2D précédent.

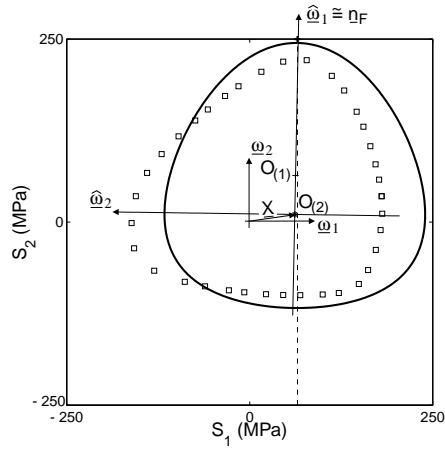
Des modèles macroscopiques, plus performants pour la prévision du rochet multiaxial, sont proposés dans [Burlet et Cailletaud 87], [Ohno et Wang 93] ou [Jiang et Sehitoglu 96]. Ils sont basés sur des domaines d’élasticité de von Mises et parviennent à limiter le rochet 2D en diminuant le terme de rappel de l’écrouissage cinématique lors de trajets non-proportionnels. L’équation d’évolution de l’écrouissage cinématique devient alors proche de celle d’un écrouissage cinématique linéaire :

$$\dot{X}_i = C \dot{\varepsilon}_i^p \quad (3.18)$$

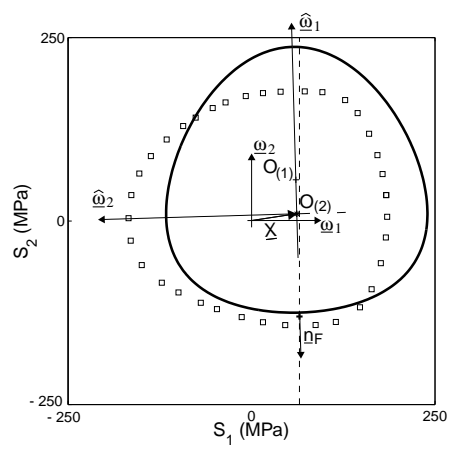
Cela a pour conséquence de translater le centre du domaine d’élasticité (par rapport à sa position actuelle) dans la direction de l’écoulement plastique et donc, au bout de quelques cycles, de centrer le domaine d’élasticité sur la contrainte axiale moyenne<sup>8</sup>.

8. En effet, tant que  $\dot{\varepsilon}_1^p$  est non nulle,  $\dot{X}_1$  est également non nulle si bien que le domaine d’élasticité se translate vers la contrainte axiale moyenne  $S_1$ .

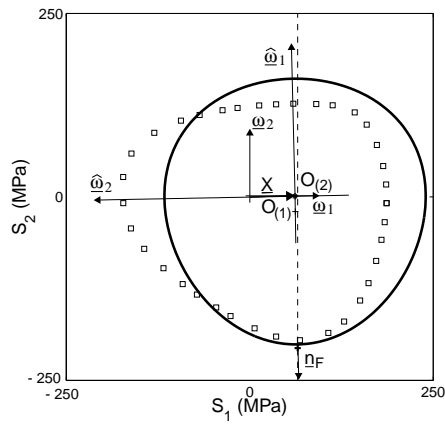




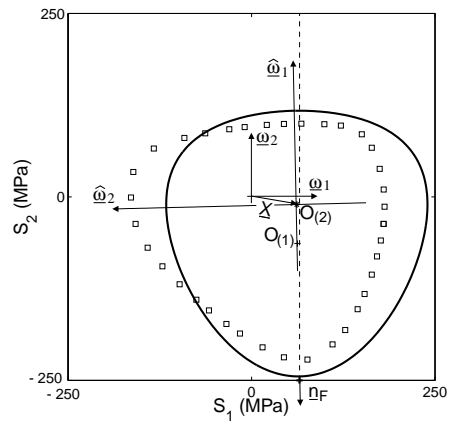
(a) Surface seuil en B



(b) Deuxième surface seuil

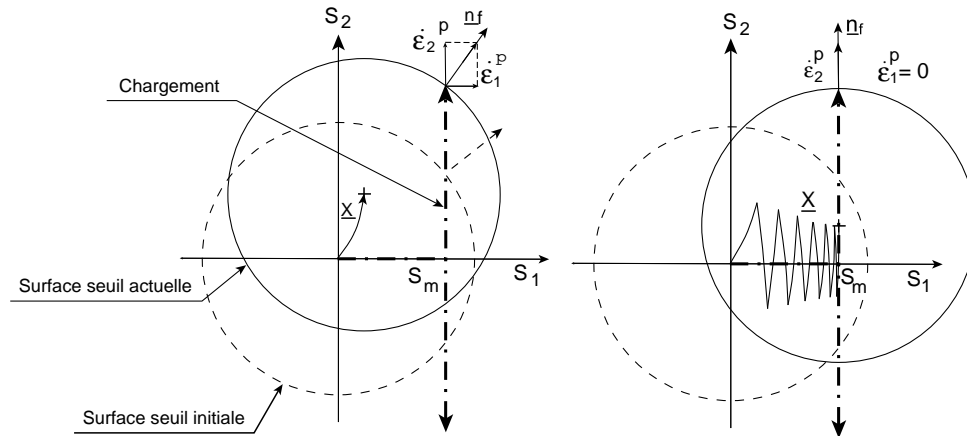


(c) Troisième surface seuil



(d) Surface seuil en C

FIG. 3.15 – Évolution de la distorsion au cours du dernier cycle d'un trajet de rochet 2D,  $\epsilon_{12} = \pm 0,2\%$



(a) Orientation de l'écoulement plastique lors d'un trajet de rochet 2D, si l'on considère un domaine d'élasticité de von Mises et la loi de normalité

(b) Position finale du domaine d'élasticité de von Mises pour limiter au maximum le rochet 2D

FIG. 3.16 – Évolution de la position du domaine de von Mises pour limiter le rochet 2D

L'écoulement plastique est alors uniquement orienté vers la direction de cisaillement, ce qui annule le taux de rochet axial (Fig. 3.16(b)). Dans ce cas, le domaine d'élasticité est encore plus décalé vers la direction de traction qu'il ne l'était dans le modèle de Mises présenté sur la figure 3.11. Ces modèles ne seront donc pas non plus capables (*a priori*) de représenter le comportement du matériau si on modifie la direction de chargement.

### 3.2.5 Bilan

La simulation de trajets de rochet 2D nous permet de conclure à l'inefficacité du modèle à distorsion, tel qu'il a été présenté, pour améliorer la description du rochet multiaxial. En effet, la surface seuil obtenue avec le modèle macroscopique, bien que distordue, ne modifie pratiquement pas la direction de l'écoulement plastique par rapport à celle donnée avec un domaine de von Mises centré en  $A$ , origine du repère mobile. Par conséquent, les problèmes rencontrés avec les modèles macroscopiques basés sur des domaines de von Mises se retrouvent évidemment avec ce modèle à distorsion. Le seul moyen d'améliorer la prévision du rochet 2D est donc toujours de modifier la loi d'évolution de l'écrouissage cinématique afin que le domaine d'élasticité vienne se centrer autour de la contrainte axiale moyenne. L'intérêt de la distorsion est alors nul. Dans l'annexe A, nous proposons une autre loi d'évolution pour la rotation du repère mobile qui permet de mieux décrire les cinétiques de rochet, mais les formes

du domaine d'élasticité obtenues ne correspondent pas du tout à celles prévues par le modèle polycristallin. Ce dernier point signifie que lors d'un changement de direction du chargement, les prévisions du comportement faites avec le modèle à distorsion ne seront pas en accord avec celles prévues par le modèle polycristallin, ce qui nous permet d'éliminer également cette dernière version du modèle à distorsion.

D'après les figures 3.10 et 3.11, les surfaces seuil détectées avec le modèle polycristallin n'ont pas la forme d'un œuf d'axe l'écrouissage cinématique macroscopique ou la direction du chargement. En supposant que cette "surface polycristalline" représente convenablement celle des matériaux réels, cette observation nous permet d'exclure aussi la plupart des modèles à distorsion recensés précédemment.

L'échec de modélisation rencontré vient essentiellement du fait que l'on ne parvient pas à créer une bosse au point de chargement, au moment de l'entrée en plasticité. Compte tenu du modèle à distorsion et des équations d'évolution que nous avons retenus, le seul moyen de former une bosse en un point de la surface seuil est d'orienter l'axe  $\hat{\omega}_i$  du repère mobile vers ce point particulier en imposant une translation non-nulle du cercle ( $i$ ) sur son axe. Or, la rotation du repère mobile ne peut pas avoir lieu instantanément, et l'on commet donc une erreur pendant tout le temps où le repère tourne (voir aussi la réponse perturbée du modèle lors de la simulation du trajet de compression pure suite à la simulation de rochet 2D, Fig. 3.12). D'autre part, une fois le repère mobile "correctement positionné", la bosse se forme dans la direction de l'axe  $\hat{\omega}_i$ . Or, cette direction ne correspond pas nécessairement à la direction de chargement donnée par  $\underline{\dot{\epsilon}}$  ou  $\underline{\dot{\epsilon}}^p$ , direction selon laquelle on souhaite orienter la distorsion de la surface seuil. Une erreur est alors commise sur la direction de l'écoulement plastique. Tel qu'il a été présenté, le modèle à distorsion ne permet donc pas de choisir le point de la surface seuil où la distorsion se forme et la direction de la distorsion de façon indépendante.

Pour remédier à ces défauts du modèle, nous nous proposons de revenir au cadre général proposé dans [Kurtyka et Życzkowski 96], c'est-à-dire au cas où les cercles peuvent se déplacer en dehors de leur axe de référence. Cela donne un degré de liberté supplémentaire au modèle, puisque dans ce cadre, de nouvelles formes de distorsion peuvent être obtenues et surtout, une bosse et un plat peuvent être générés à côté des axes du repère mobile. Malheureusement, ce cadre plus général est aussi plus lourd d'utilisation et nous serons amenés à faire certaines hypothèses simplificatrices. Enfin, la convexité de la surface seuil n'est plus assurée [Kurtyka et Życzkowski 85]. Il convient donc de définir le nouveau domaine de définition des variables internes du modèle, plus restreint que le précédent, à l'intérieur duquel la surface seuil reste convexe.

### 3.3 Modification du modèle à distorsion

#### 3.3.1 Une nouvelle simplification du modèle [Vincent *et al.* 01a] [Vincent *et al.* 01b]

Nous avons montré que la simplification du modèle à distorsion proposée dans [Kurtyka et Życzkowski 85], associée aux lois d'évolution que nous avons introduites, ne permettait pas de représenter convenablement la forme des surfaces seuil obtenues avec un modèle polycristallin au cours d'un trajet de rochet 2D. Dans cette partie, nous revenons donc au modèle général proposé dans [Kurtyka et Życzkowski 85]. Les hypersphères sont libres de se déplacer dans tout l'espace et non plus seulement sur leur axe de référence. Dans le cas de chargements 5D, l'équation polaire du domaine d'élasticité s'écrit alors (sans sommation sur les indices entre parenthèses) :

$$\hat{S}_i = \left\{ d_{(i)j} t_j + \left[ (d_{(i)j} t_j)^2 + R_{(i)}^2 - d_{(i)j} d_{(i)j} \right]^{1/2} \right\} t_i \quad \begin{cases} i = 1, \dots, 5 \\ j = 1, \dots, 5 \end{cases} \quad (3.19)$$

avec  $t_i$  les coordonnées du rayon unitaire de projection.

Sans hypothèse simplificatrice, le modèle présente 25 variables de distorsion  $d_{(i)j}$  dans le cas de chargements multiaxiaux quelconques 5D. Ce nombre très important de variables n'est sans doute pas justifié puisque des formes complexes peuvent être obtenues avec un nombre plus limité de variables. De plus, la convexité de la surface seuil n'est plus assurée dès que les hypersphères quittent leur axe de référence [Kurtyka et Życzkowski 85]. Or, l'étude analytique ou numérique du domaine d'évolution des variables de distorsion pour lequel la surface reste convexe semble insurmontable dans le cas général puisque chaque variable influe sur la valeur maximale admissible des autres variables. Nous avons donc intérêt à limiter le nombre de variables de distorsion, sans pour autant reprendre la simplification proposée par Kurtyka et Życzkowski.

Nous proposons donc de bloquer les 4 dernières hypersphères sur l'origine du repère mobile tout en laissant libre le déplacement de la première hypersphère dans toutes les directions possibles, soit :

$$d_{(i)j} = 0 \quad \forall i \neq 1 \quad (3.20)$$

Un exemple de surface seuil est représenté sur la figure 3.17 dans le cas d'un espace à 2 dimensions. On note qu'une bosse et un plat se forment dans une direction parallèle à l'axe  $\hat{\omega}_1$  du repère mobile mais à côté de celui-ci. Cette nouvelle formulation du modèle à distorsion permet donc de relâcher la contrainte liée à la simplification du modèle proposée dans [Kurtyka et Życzkowski 96], contrainte selon laquelle le point d'apparition de la distorsion et la direction de cette dernière ne pouvaient pas être choisis de façon indépendante. Dans le cas présent, l'équation polaire du domaine d'élasticité devient :

$$\begin{cases} \hat{S}_1 = \left\{ d_{(1)j} t_j + \left[ (d_{(1)j} t_j)^2 + R_{(1)}^2 - d_{(1)j} d_{(1)j} \right]^{1/2} \right\} t_1 \\ \hat{S}_i = R_{(i)} t_i \quad \forall i \neq 1 \end{cases} \quad (3.21)$$



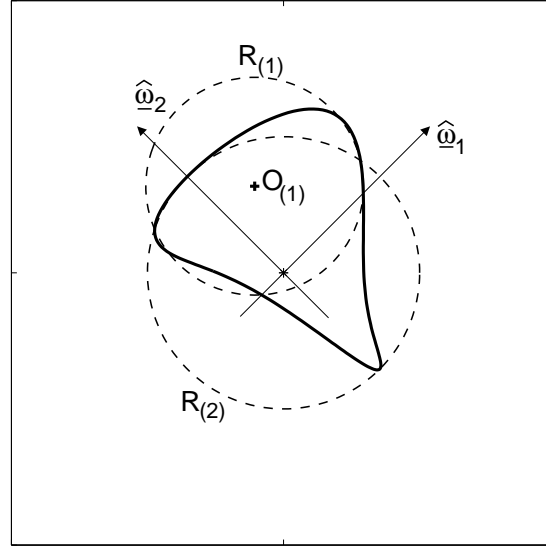


FIG. 3.18 – Exemple de surface non-convexe avec la nouvelle simplification du modèle à distortion

$$\text{avec } t_j = \frac{\hat{S}_j}{R_{(j)}} \quad \forall j \neq 1 \quad \text{et} \quad t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - t_2^2 - t_3^2 - t_4^2 - t_5^2} \quad (3.26)$$

Cette équation décrit le domaine de von Mises lorsque  $d_{(1)j} = 0$  et  $R_{(j)} = R, \forall j$ . La simplification que nous proposons conserve le même nombre de variables de distortion (5 dans le cas d'un chargement 5D) que celle proposée par Kurtyka et Życzkowski. Elle conserve également le côté pratique lié à une équation implicite de la surface seuil. La direction de la distortion de la surface seuil est donnée par le vecteur  $\hat{w}_1$  et un décalage de la distortion par rapport à cet axe  $\hat{w}_1$  est possible grâce aux coordonnées  $d_{(1)j}$  où  $j \neq 1$ . Nous pouvons donc générer des formes assez complexes, mais l'inconvénient majeur de cette formulation est que la surface seuil peut devenir non-convexe (Fig. 3.18). Avant de procéder à toute identification du modèle, nous nous proposons donc d'étudier dans un premier temps le domaine d'évolution possible des variables de distortion tel que la surface seuil reste toujours convexe.

### 3.3.2 Étude de la convexité de la surface seuil

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas de chargements 2D pour étudier la convexité d'une courbe plutôt que celle d'une (hyper)surface. Nous montrerons ensuite que ce résultat peut s'étendre au cas d'un chargement 5D.

Pour un chargement 2D, la "surface" seuil a l'équation polaire suivante :

$$\begin{cases} \hat{S}_1 = \left\{ d_{(1)j} t_j + \left[ (d_{(1)j} t_j)^2 + R_{(1)}^2 - d_{(1)j} d_{(1)j} \right]^{1/2} \right\} t_1 \\ \hat{S}_2 = R_{(2)} t_2 \end{cases} \quad (3.27)$$

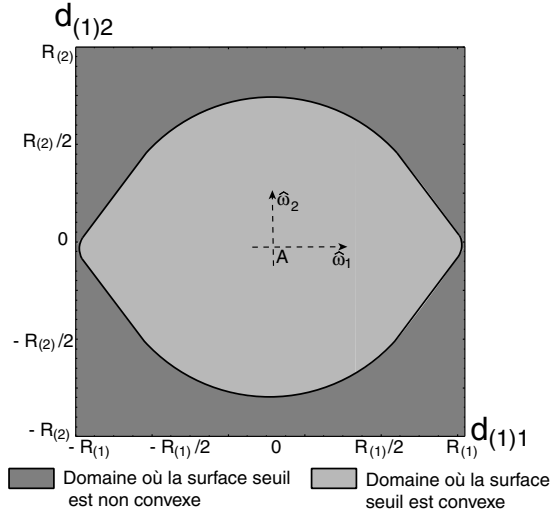


FIG. 3.19 – *Domaine d'évolution possible des variables de distortion pour obtenir une surface seuil convexe*

avec  $t_1 = \cos \beta$  et  $t_2 = \sin \beta$  (Fig. 3.17).

Le rayon de courbure de cette courbe paramétrique s'écrit :

$$R_c = \frac{\left( \dot{\hat{S}}_1^2 + \dot{\hat{S}}_2^2 \right)^{3/2}}{\dot{\hat{S}}_1 \ddot{\hat{S}}_2 - \dot{\hat{S}}_2 \ddot{\hat{S}}_1} \quad (3.28)$$

avec  $\dot{\hat{S}}_i$  et  $\ddot{\hat{S}}_i$  les dérivées première et seconde de  $\hat{S}_i$  par rapport au paramètre  $\beta$ .

La courbe paramétrique est non-convexe si le rayon de courbure est négatif. Par conséquent, étudier la convexité de la surface seuil en 2D revient à étudier le signe de  $R_c$ , et donc finalement celui du dénominateur de  $R_c$ , en fonction des valeurs prises par les variables de distortion  $d_{(1)1}$  et  $d_{(1)2}$  et quel que soit  $\beta$ . Nous ne sommes pas parvenus à trouver une expression analytique à ce problème et nous nous sommes contentés d'une solution numérique. Le domaine d'évolution possible des variables de distortion est représenté sur la figure 3.19. Nous appliquons aux variables de distortion  $d_{(1)1}$  et  $d_{(1)2}$  les mêmes lois d'évolution qu'aux variables  $d_{(1)}$  et  $d_{(2)}$  de la précédente simplification du modèle :

$$\dot{d}_{(1)1} = C_{(1)1} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_1^p - \left( \frac{|d_{(1)1}|}{R_{(1)}/\gamma_{(1)1}\Phi_{(1)1}(p)} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)1}}{|d_{(1)1}|} \dot{p} \right) \quad (3.29)$$

$$\dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_2^p - \left( \frac{|d_{(1)2}|}{R_{(2)}/\gamma_{(1)2}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)2}}{|d_{(1)2}|} \dot{p} \right) \quad (3.30)$$

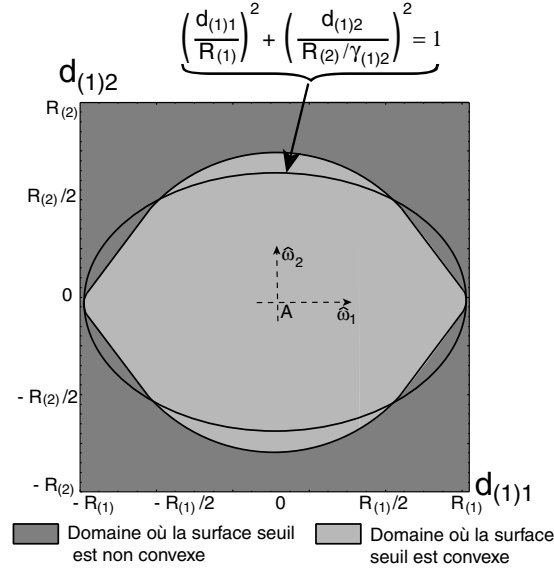


FIG. 3.20 – Approximation elliptique du domaine d'évolution acceptable des variables de distortion permettant de garantir la convexité de la surface seuil

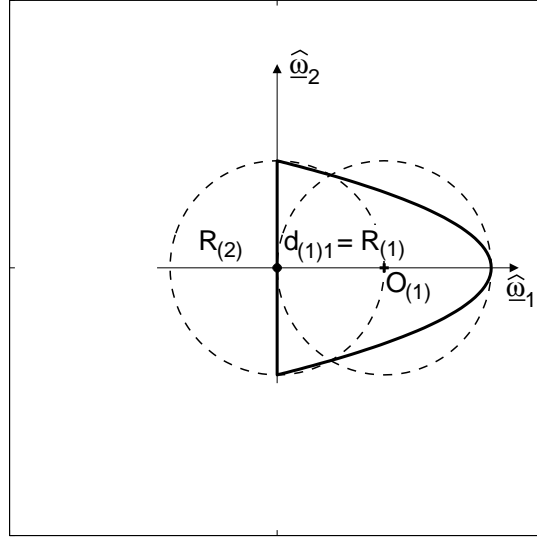
Ces équations non-linéaires présentent entre autres l'avantage de définir une borne supérieure pour les variables de distortion, à savoir  $d_{(1)1_{max}} = R_{(1)}/\gamma_{(1)1}\phi_{(1)1}(p)$  et  $d_{(1)2_{max}} = R_{(2)}/\gamma_{(1)2}$ . Par conséquent, il suffit de choisir convenablement  $\gamma_{(1)1}\phi_{(1)1}(p)$  et  $\gamma_{(1)2}$  pour que les valeurs de  $d_{(1)1}$  et  $d_{(1)2}$  restent toujours inférieures aux valeurs limites qui conduisent à une surface seuil non-convexe.

Toutefois, la forme du domaine d'évolution possible de  $d_{(1)1}$  et  $d_{(1)2}$  (Fig. 3.19) nous incite à faire dépendre l'une de l'autre les limites supérieures des variables de distortion. En effet, lors d'un essai de traction par exemple, la variable  $d_{(1)1}$  va augmenter, ce qui limite la valeur maximum possible pour  $d_{(1)2}$  au cours d'un changement de direction. Par simplicité, nous approximations la forme en "citron" par une ellipse (Fig. 3.20). Cette approximation laisse apparaître une zone où les valeurs des variables de distortion conduisent à une surface seuil non-convexe. Néanmoins, l'identification du modèle sur des surfaces seuil obtenues lors d'essais uniaxiaux donne une valeur limite de  $d_{(1)1}$  comprise entre  $R_{(1)}/5$  et  $R_{(1)}/2$ , c'est-à-dire bien inférieure au cas extrême  $d_{(1)1} = R_{(1)}$  (Fig. 3.21). L'approximation elliptique du domaine d'évolution acceptable des variables de distortion est donc justifiée dans ce cas.

Nous faisons dépendre  $d_{(1)2_{max}}$  de la valeur actuelle de  $d_{(1)1}$  :

$$d_{(1)2_{max}} = \frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \frac{d_{(1)1}^2}{R_{(1)}^2}} \quad (3.31)$$



FIG. 3.21 – *Domaine distordu obtenu avec  $d_{(1)1} = R_{(1)}$* 

L'équation (3.30) devient donc :

$$\dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2^p - \left( \frac{|d_{(1)2}|}{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \frac{d_{(1)1}^2}{R_{(1)}^2}}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)2}}{|d_{(1)2}|} \dot{p} \right) \quad (3.32)$$

Quant à  $d_{(1)1}$ , sa valeur maximale devrait en toute rigueur dépendre de la valeur actuelle de  $d_{(1)2}$ . Néanmoins, il ne faut pas oublier que le repère mobile tourne toujours en direction du point de chargement, de telle sorte que la valeur de  $d_{(1)2}$  diminue au profit d'une augmentation de  $d_{(1)1}$ . Nous supposons donc que l'erreur commise en ne faisant pas dépendre  $d_{(1)1_{max}}$  de  $d_{(1)2}$  est négligeable<sup>9</sup>.

Le domaine final d'évolution des variables de distorsion, déterminé par les équations d'évolution de ces variables, est reporté sur la figure 3.22. On remarque qu'il se situe intégralement à l'intérieur du domaine dans lequel la surface seuil est convexe.

Le résultat que nous avons obtenu est tout à fait transposable au cas de chargements de dimension supérieure à 2. En effet, étant donnée l'hypothèse faite pour la simplification du modèle, toutes les directions autres que la direction  $\hat{w}_1$  sont équivalentes. Par exemple, dans le cas de chargements 3D, supposons que la première sphère soit décalée selon les deux directions orthogonales à  $\hat{w}_1$  de telle sorte que  $d_{(1)1} = 0$  et  $d_{(1)2} = d_{(1)3} = R/2,6$  (Fig. 3.23). On suppose ici que les 3 sphères ont un même rayon  $R$ . Dans ce cas, la forme de la surface dans le repère fixe n'est pas modifiée

9. En tout état de cause, la surface restera convexe puisque si  $d_{(1)1}$  dépasse la valeur limite pour un  $d_{(1)2}$  donné, l'équation (3.32) fera diminuer  $d_{(1)2}$  pour que la surface reste convexe.

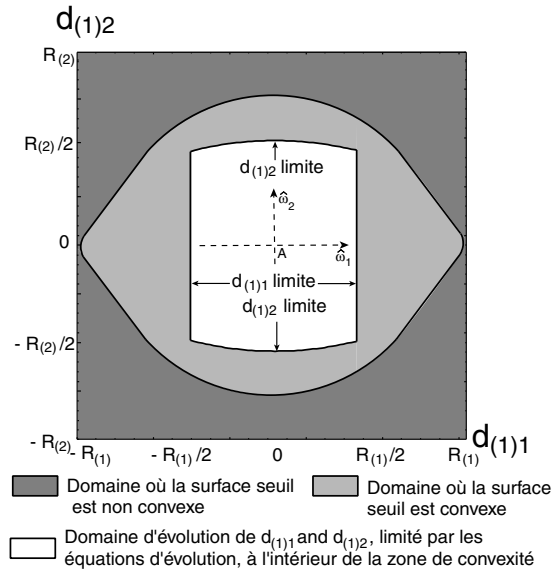


FIG. 3.22 – *Limite des variables de distortion imposées par les équations d'évolution pour que la surface seuil reste convexe*

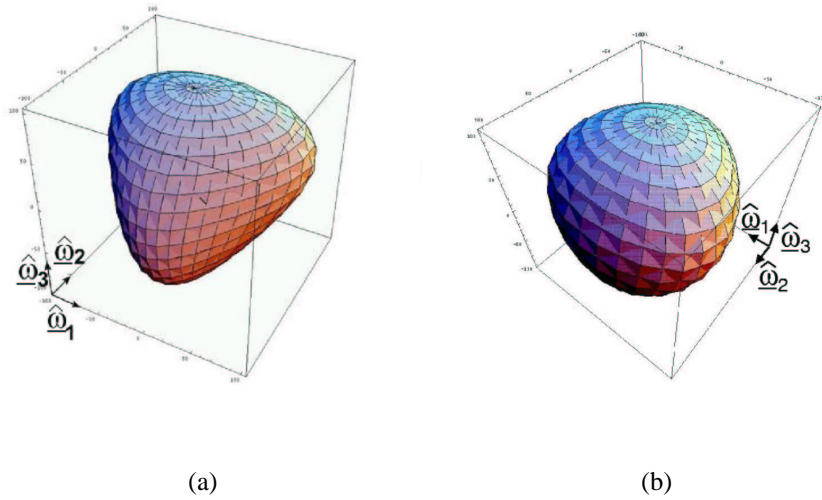


FIG. 3.23 – *Surface seuil obtenue pour une distortion portée selon les axes  $\underline{\hat{w}}_2$  et  $\underline{\hat{w}}_3$  et de même amplitude*

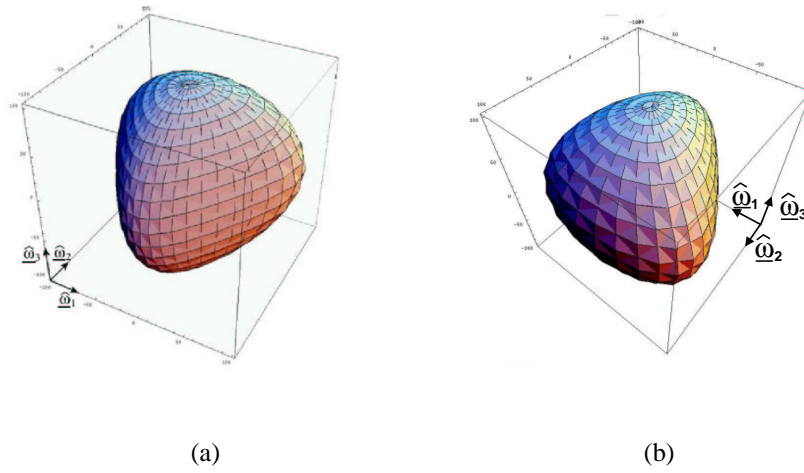


FIG. 3.24 – Surface seuil obtenue pour une distorsion portée uniquement selon  $\hat{w}_2$  et d'amplitude la norme de la précédente distorsion portée sur les axes  $\hat{w}_2$  et  $\hat{w}_3$

par une rotation du repère mobile autour de l'axe  $\hat{w}_1$  à condition que les positions de l'origine  $A$  du repère mobile et du centre  $O_{(1)}$  de la première sphère restent inchangées dans le repère fixe. La forme reste en particulier la même, dans le repère fixe, suite à une rotation du repère mobile telle que l'axe  $\hat{w}_2$  passe cette fois-ci par le centre  $O_{(1)}$  de la première sphère. La nouvelle forme dans le repère mobile est représentée sur la figure 3.24. Dans ce cas, les nouvelles variables de distorsion  $d'_{(1)j}$  deviennent :

$d'_{(1)1} = d_{(1)1}$ ,  $d'_{(1)2} = \sqrt{d_{(1)2}^2 + d_{(1)3}^2} = R/1,85$  et  $d'_{(1)3} = 0$ . Comme exposé précédemment, la convexité peut alors être étudiée à partir des valeurs de  $d'_{(1)1}$  et  $d'_{(1)2}$  et l'on vérifie dans ce cas particulier que la surface est bien convexe.

Dans le cas général, il faut donc s'assurer que les équations d'évolution des variables  $d_{(1)j}$  garantissent toujours que  $d_{(1)1}$  et  $\sqrt{d_{(1)2}^2 + d_{(1)3}^2}$  restent respectivement inférieures aux valeurs  $d'_{(1)1_{max}}$  et  $d'_{(1)2_{max}}$  estimées numériquement et reportées sur la figure 3.19. Par exemple, d'après cette figure, la distorsion caractérisée par  $d'_{(1)1} = R/2$  et  $d'_{(1)2} = R/\sqrt{2}$  conduit à une surface non-convexe. Nous le vérifions sur la figure 3.25 où l'on impose  $d_{(1)1} = R/2$  et  $d_{(1)2} = d_{(1)3} = R/2$ .

Ce résultat implique que les valeurs limites des variables  $d_{(1)j}$ ,  $j \neq 1$  dépendent les

unes des autres. Ainsi, dans le cas de chargements 3D, on écrira :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{d_{(1)2_{max}}}{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2 + \left( \frac{d_{(1)3}}{\frac{R_{(3)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2 = 1 \\ \text{et} \\ \left( \frac{d_{(1)2}}{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2 + \left( \frac{d_{(1)3_{max}}}{\frac{R_{(3)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2 = 1 \end{array} \right. \quad (3.33)$$

d'où :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{(1)2_{max}} = \frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)3}}{\frac{R_{(3)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2} \\ \text{et} \\ d_{(1)3_{max}} = \frac{R_{(3)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)2}}{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^2} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

et enfin :

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{(1)2_{max}} = \frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2 - \left( \frac{\gamma_{(1)2} d_{(1)3}}{R_{(3)}} \right)^2} \\ \text{et} \\ d_{(1)3_{max}} = \frac{R_{(3)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2 - \left( \frac{\gamma_{(1)2} d_{(1)2}}{R_{(2)}} \right)^2} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

toujours accompagné des équations d'évolution suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\mathbf{e}}}_2^p - \left( \frac{|d_{(1)2}|}{d_{(1)2_{max}}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)2}}{|d_{(1)2}|} \dot{p} \right) \\ \text{et} \\ \dot{d}_{(1)3} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\mathbf{e}}}_3^p - \left( \frac{|d_{(1)3}|}{d_{(1)3_{max}}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)3}}{|d_{(1)3}|} \dot{p} \right) \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Cette démarche se généralise au cas de chargements 5D en écrivant :

$$d_{(1)j_{max}} = \frac{R_{(j)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2 - \left( \frac{\gamma_{(1)2} d_{(1)k}}{R_{(k)}} \right)^2} \quad \text{avec } k \neq 1, \quad k \neq j \quad (3.37)$$

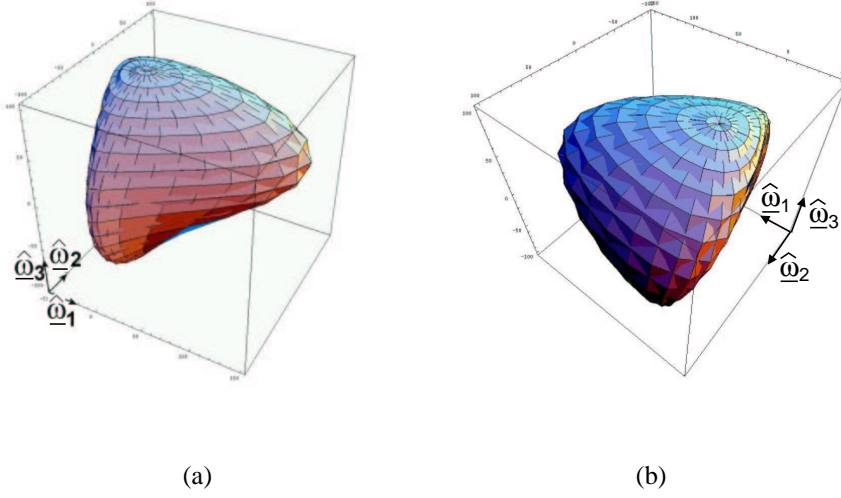


FIG. 3.25 – Surface seuil obtenue pour une distorsion  $d_{(1)1} = R/2$  et  $d_{(1)2} = d_{(1)3} = R/2$

### 3.3.3 Cadre viscoplastique

Comme dans le cas de la précédente simplification du modèle à distorsion, nous avons implanté ce modèle dans le logiciel SiDoLo en nous plaçant dans un cadre viscoplastique. Là encore, nous n'avons pas d'équation analytique pour exprimer la distance entre le point de chargement et la surface seuil. Nous sommes donc contraints de procéder à une recherche numérique du point de la surface seuil le plus proche du point de chargement. Avec la nouvelle simplification du modèle à distorsion (Eq. (3.27)), nous devons fournir un nouveau point de départ pour le processus de minimisation et nous prenons (voir la démarche dans le chapitre précédent) :

$$\text{si } |\hat{S}_2| > R_{(2)} \quad \text{alors} \quad t_2 = \text{sign}(\hat{S}_2) \quad \text{et sinon} \quad t_2 = \frac{\hat{S}_2}{R_{(2)}} \quad (3.38)$$

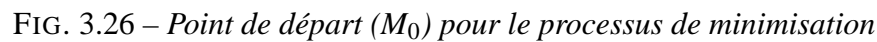
puis toujours,

$$\beta = \arcsin(t_2) \quad \text{si } \hat{S}_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad \beta = \pi - \arcsin(t_2) \quad \text{si } \hat{S}_1 < 0 \quad (3.39)$$

comme valeur initiale de  $\beta$  pour le processus de minimisation (voir Fig. 3.26).

### 3.3.4 Identification du nouveau modèle à distorsion avec le modèle polycristallin

Nous nous plaçons dans le cas particulier de chargements biaxiaux où la rotation du système de coordonnées mobile est décrite par un seul angle  $\phi$ . Nous reprenons alors la loi d'évolution retenue pour la première simplification du modèle de


$$\dot{\phi} = C_{\phi} \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \dot{p} \quad (3.40)$$

Nous proposons donc :

$$\dot{\phi} = C_{\phi} \text{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right) \left| \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right|^{m_{\phi}} \dot{p} \quad (3.41)$$

Nous rappelons les différentes équations du modèle à distorsion dans le tableau 3.3. Notons que cette version du modèle à distorsion ne modifie pas les résultats d'iden-

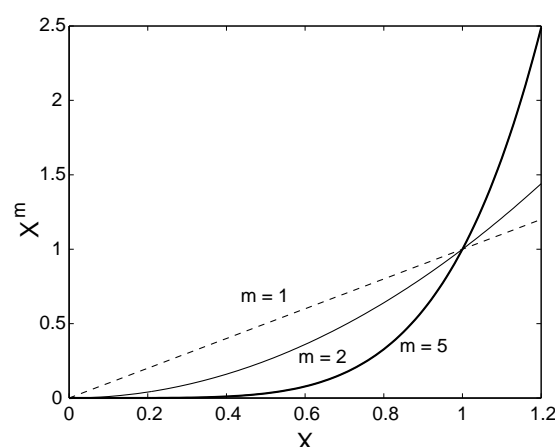


FIG. 3.27 – Utilisation d'une fonction puissance pour limiter la rotation du repère mobile pour de faibles valeurs de  $\hat{S}_2$

tification obtenus avec la précédente version du modèle sur les essais uniaxiaux (Fig. 3.28 et 3.29). Nous reprenons donc la démarche d'identification illustrée dans le tableau 3.2<sup>10</sup> directement au niveau de l'étape 5, étape où l'on identifie le modèle sur des trajets de rochet multiaxial. Nous identifions notamment le modèle sur la simulation par le modèle polycristallin de l'essai de rochet 2D "classique" ( $\sigma_{11} = Cte$  et  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$ ), qui avait mis en défaut la première simplification du modèle macroscopique. Les résultats sont reportés sur la figure 3.30. Il apparaît cette fois-ci que l'identification du modèle à distorsion est très satisfaisante. Nous représentons aussi sur cette même figure une surface seuil du modèle polycristallin et celle du modèle à distorsion obtenue au même niveau de chargement dans le dernier cycle. Là encore, nous pouvons être satisfaits de la correspondance entre les deux modèles, tant du point de vue de la forme du domaine d'élasticité que de sa position. Notons au passage que la forme des surfaces seuil obtenues avec le modèle à distorsion n'a pas été utilisée pour l'identification du modèle. Il s'agit donc d'un premier résultat de validation du modèle à distorsion. Pour mémoire, nous reportons les résultats que nous avons obtenus avec un modèle macroscopique basé sur le domaine de von Mises et identifié sur les mêmes essais uniaxiaux. La différence de performance est nette.

Pour parvenir à ce résultat, le repère mobile a opéré une rotation de  $90^\circ$  et il est resté dans cette position pendant que le centre du premier cercle se décalait dans la direction de la contrainte axiale ( $d_{(1)2} < 0$ ). Le taux de rochet final est lié à la position finale de ce cercle selon l'axe  $\hat{\omega}_2$  et à la rotation du repère mobile qui peut subsister au cours des cycles.

Imaginons un changement de trajectoire du chargement suite à ce trajet de rochet 2D, dans la direction de compression pure. Le comportement obtenu avec le nouveau modèle à distorsion est comparé au comportement prévu par le modèle polycristallin sur

10. Bien que l'on identifie une nouvelle version du modèle à distorsion, la démarche d'identification reste la même.

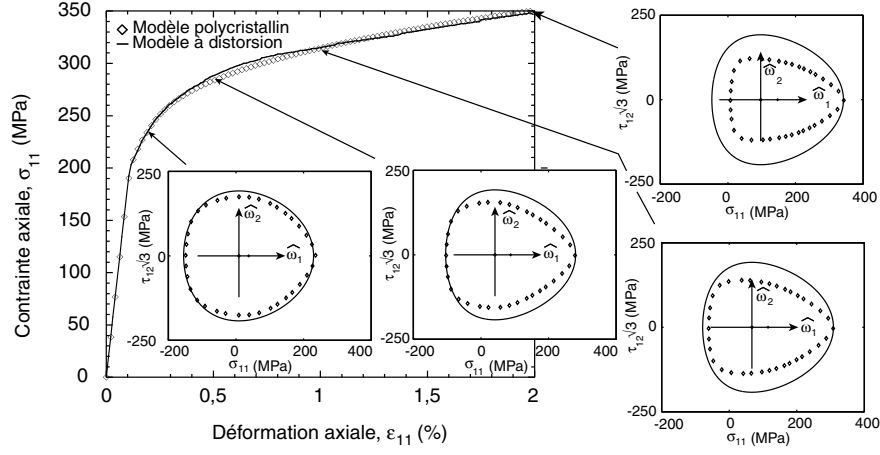
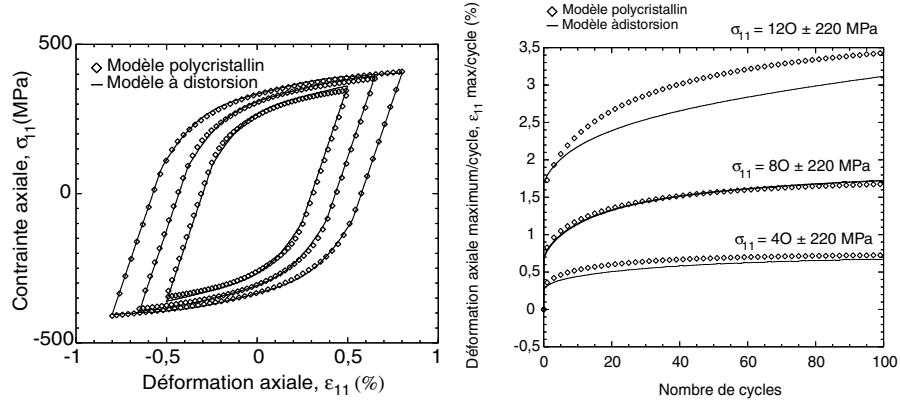


FIG. 3.28 – Identification du modèle à distortion sur une simulation de traction avec le modèle polycristallin



(a) Identification du modèle à distortion sur une simulation d'écroutissage cyclique à paliers croissants avec le modèle polycristallin

(b) Identification du modèle à distortion sur des simulations de rochet uniaxial avec le modèle polycristallin

FIG. 3.29 – Identification du modèle à distortion sur des simulations cycliques uniaxiales avec le modèle polycristallin



---

Surface seuil	$F = \hat{S}_1^2 - 2\hat{S}_1 t_1 (d_{(1)k} t_k) - t_1^2 (R_{(1)}^2 - d_{(i)k} d_{(i)k}) = 0$ <p>avec <math>t_2 = \frac{\hat{S}_2}{R_{(2)}}</math> et <math>t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - t_2^2}</math></p>
Écrouissage Isotrope	$\dot{R}_{(1)} = b(R_\infty - R_{(1)}) \dot{p} \text{ et } \dot{R}_{(2)} = (1 + \delta) \dot{R}_{(1)}$ <p>avec <math>R_{(i)} = S_0</math> à <math>t = t_0</math></p>
Écrouissage Cinématique	$\begin{cases} \dot{d}_{(1)1} = C_{(1)1} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_1^p - \left( \frac{\gamma_{(1)1} \Phi_{(1)1}(p)  d_{(1)1} }{R_{(1)}} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)1}}{ d_{(1)1} } \dot{p} \right) \\ \dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_2^p - \left( \frac{ d_{(1)2} }{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)2}}{ d_{(1)2} } \dot{p} \right) \end{cases}$ <p>avec <math>\Phi_{(1)1}(p) = \Phi_{(1)1\infty} + (1 - \Phi_{(1)1\infty}) e^{-\omega p}</math></p> $\dot{X}_{(n)i} = C_{(n)} \left( \dot{\hat{\epsilon}}_i^p - \left( \gamma_{(n)} \Phi_{(n)}(p) \ \underline{X}_{(n)}\  \right)^{m_{(n)}+1} \frac{X_{(n)i}}{\ \underline{X}_{(n)}\ } \dot{p} \right) \quad n = 2, 3$ <p>avec <math>\Phi_{(n)}(p) = \Phi_{(n)\infty} + (1 - \Phi_{(n)\infty}) e^{-\omega p}</math></p>
Rotation du système de coordonnées mobile	$\dot{\phi} = C_\phi \text{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right) \left  \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right ^{m_\phi} \dot{p}$

---

TAB. 3.3 – Résumé des équations du modèle à distorsion “Distor2D” pour le cas de chargements biaxiaux

la figure 3.31(a). Sur cette figure sont aussi reportées les réponses des deux précédents modèles macroscopiques : l’ancien modèle à distorsion et le modèle basé sur un domaine de von Mises. De même, nous représentons sur la figure 3.31(b) la réponse en contraintes du modèle à distorsion et celle du modèle polycristallin ainsi que les surfaces seuil obtenues avec ces deux modèles à la fin du trajet de chargement. Le modèle à distorsion représente relativement bien la distorsion de la “surface” polycristalline mais on note un palier à contrainte axiale constante au moment de l’entrée en plasticité (sur la réponse  $(\epsilon_{11}; \sigma_{11})$  de la figure 3.31(a) et sur la réponse  $(S_1; S_2)$  de la figure 3.31(b)). Ce palier est dû à la loi de rotation du repère mobile (3.41). En effet, l’entrée en plasticité lors de la décharge se fait pratiquement à  $90^\circ$  de l’axe  $\underline{\hat{\omega}}_1$ , ce qui provoque une variation brusque de la rotation du repère mobile ( $\dot{\phi} \rightarrow \infty$ ). Une modification de la loi sont donc nécessaires pour éviter ce phénomène. Malgré tout, nous avons fait le choix de conserver le modèle simplifié en l’état tout en étant conscients de ses limites. Nous proposons d’autres identifications du modèle sur des simulations de rochet 2D faites avec le modèle polycristallin. Les résultats sont reportés sur la figure 3.32. On observe une bonne corrélation entre les cinétiques de rochet mais aussi entre les surfaces seuil obtenues à la fin des simulations de rochet avec les deux modèles.

Le jeu de coefficients est désormais complètement identifié et il est reporté dans le ta-

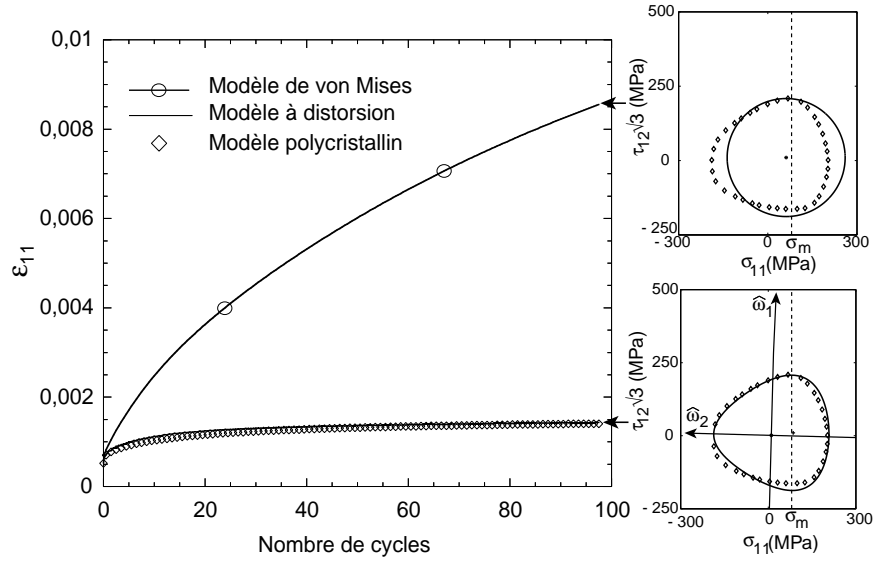
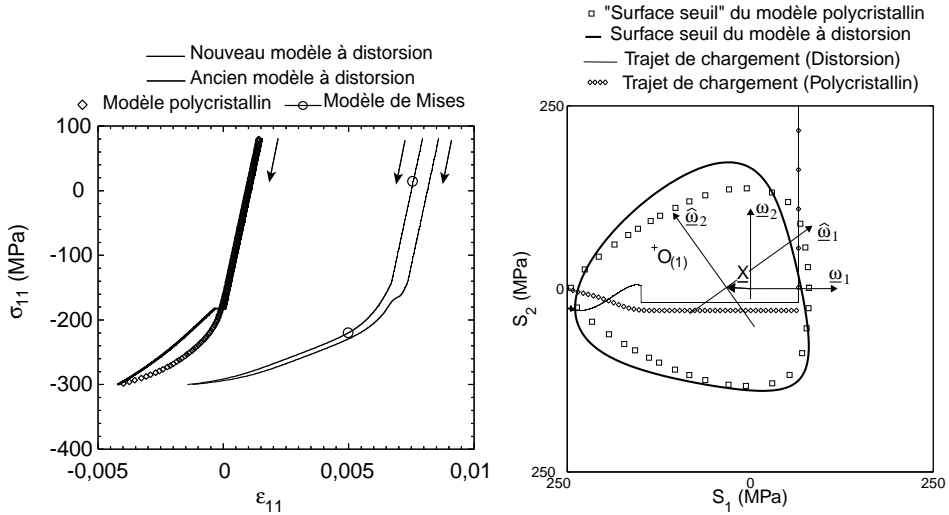


FIG. 3.30 – Comparaison entre la réponse du modèle à distorsion et celle d'un modèle de von Mises vis-à-vis d'une simulation de rochet biaxial faite avec le modèle polycristallin



(a) Simulation d'une compression pure jusqu'à  $\sigma_{11} = -300$  MPa suite au trajet de rochet 2D

(b) Comparaison des surfaces seuil obtenues avec le modèle à distorsion et le modèle polycristallin

FIG. 3.31 – Simulation d'une décharge en compression ( $\sigma_{11} = 80 \rightarrow -300$  MPa ;  $\epsilon_{12} = 0$ )

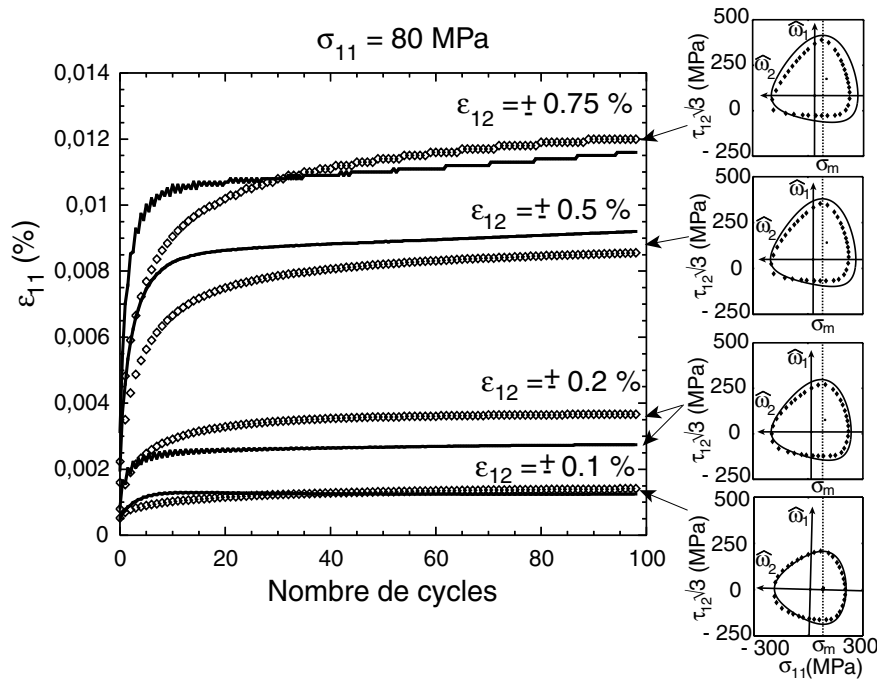


FIG. 3.32 – Identification du modèle à distorsion sur des simulations de rochet biaxial faites avec le modèle polycristallin

bleau 3.4 [Vincent *et al.* 02a]. Nous pouvons remarquer que le coefficient  $\delta$  est nul, ce qui signifie que les deux cercles de construction du modèle ont toujours le même rayon. L'identification automatique avec le logiciel SiDoLo n'a pas conduit à une valeur très éloignée de 0 et nous simplifions donc le modèle en imposant :

$$R_{(1)} = R_{(2)} \quad (3.42)$$

Dans les modèles macroscopiques basés sur des domaines de von Mises, les coefficients  $m_i$  des lois d'évolution des écrouissements cinématiques sont généralement non nuls pour limiter la déformation progressive, notamment sous sollicitations biaxiales. Ici, le coefficient  $m_{(1)1}$  est nul et pourtant le rochet biaxial est bien décrit par le modèle à distorsion. En fait, au cours des simulations de rochet 2D, l'axe  $\hat{w}_1$  s'oriente dans la direction de cisaillement et par conséquent, la distorsion  $d_{(1)1}$  gère alors le déplacement du premier cercle de construction dans la direction de cisaillement, direction selon laquelle il n'y a pas de rochet<sup>11</sup>. En revanche, la variable de distorsion  $d_{(1)2}$  gère le déplacement de ce même cercle selon la direction axiale. C'est la raison pour laquelle on choisit un exposant  $m_{(1)2}$  si élevé ( $m_{(1)2} = 20$ ). En effet, cela permet au cercle de rester décalé par rapport à son axe de référence ( $d_{(1)2} \neq 0$ ), même lorsque la déformation plastique est orientée uniquement dans la direction de cisaillement<sup>12</sup>.

11. les simulations étant pilotées en déformation de cisaillement.

12. Dans ce cas,  $\dot{\varepsilon}_2^p = 0$  et seul le second membre de l'équation 3.32 est non nul, ce qui entraîne

Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$S_0$	157 MPa
$b$	2,23	$R_\infty$	239 MPa	$\delta$	0
$C_{(1)1}$	70600 MPa	$\gamma_{(1)1}$	4,07	$m_{(1)1}$	0
$C_2$	8000 MPa	$\gamma_2$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$m_2$	4
$C_3$	2420 MPa	$\gamma_3$	$1 \cdot 10^{-2}$	$m_3$	4
$C_{(1)2}$	$= C_{(1)1}$	$\gamma_{(1)2}$	1,85	$m_{(1)2}$	20
$\phi_{(1)1\infty}$	0,553	$\phi_{2\infty}$	0,3	$\phi_{3\infty}$	1
$\omega$	10	$C_\phi$	750	$m_\phi$	5,0
$n$	24	$K$	$10 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{1/n}$		

TAB. 3.4 – Coefficients du modèle à distorsion identifiés avec le modèle polycristallin, d'après [Vincent et al. 02a]

Nous avons choisi de conserver le même module d'écrouissage initial pour les deux variables de distorsion ( $C_{(1)1} = C_{(1)2}$ ), ce qui simplifie le modèle sans grande conséquence pour les résultats d'identification.

Enfin, on peut noter que le coefficient  $\phi_{3\infty}$  utilisé pour rendre compte de l'écrouissage cyclique est égal à 1, ce qui signifie que la loi d'évolution de la troisième variable d'écrouissage cinématique est à coefficients constants. À nouveau, nous avons fait ce choix pour simplifier le modèle, dans la mesure où cette dernière variable cinématique a une évolution quasiment linéaire et que par conséquent, il n'est pas nécessaire d'augmenter sa valeur à saturation, déjà très élevée.

Nous procédons maintenant à une validation du modèle à distorsion. Il s'agit de la simulation d'un essai "papillon", reportée sur la figure 3.33. La différence par rapport aux précédents essais est que cette fois-ci, la contrainte axiale n'est plus constante mais varie au cours des cycles autour de la valeur moyenne  $\sigma_m$ . Deux sens de parcours sont possibles, notés "sens 1" et "sens 2". Enfin, trois niveaux de contrainte axiale moyenne sont simulés successivement :  $\sigma_m = 0$  MPa,  $\sigma_m = 80$  MPa, et  $\sigma_m = 0$  MPa. Il faut noter que cet essai a mis en défaut un certain nombre de modèles macroscopiques [Portier et al. 00]. Ici, il apparaît que les comparaisons entre modèles sont satisfaisantes tant du point de vue du rochet que du point de vue des surfaces seuil. À ce stade, le modèle à distorsion semble suffisamment robuste pour qu'une identification soit maintenant tentée avec des résultats expérimentaux obtenus sur un matériau réel.

une diminution de  $d_{(1)2}$ , c'est-à-dire un rappel du cercle vers son axe. Pour éviter cela, on utilise un exposant  $m_{(1)2}$  très élevé pour que le second membre de l'équation 3.32 soit quasiment nul excepté quand  $d_{(1)2} = d_{(1)2\max}$ .

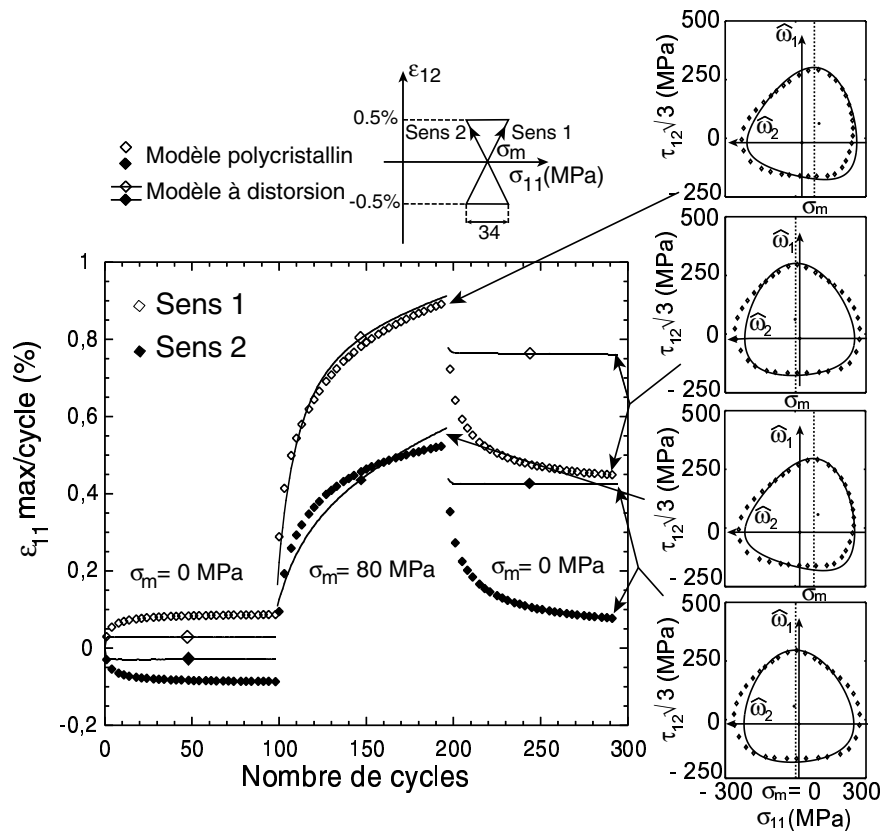


FIG. 3.33 – Validation du modèle à distortion sur une simulation de rochet biaxial “papillon” faite avec le modèle polycristallin

C	Mn	S	P	Si	Cr	Ni	Mo	Co	Fe
0,018	1,62	0,002	0,024	0,35	16,7	11,08	2,13	0,20	reste

TAB. 3.5 – Composition pondérale du matériau COTHAA de type 316L d'après [Matheron et Vilhes 94] dans [Portier et al. 00]

### 3.3.5 Identification du modèle à distorsion avec un acier inoxydable 316L

#### 3.3.5.1 Présentation du matériau

Nous identifions le modèle à distorsion avec les résultats expérimentaux obtenus dans sa thèse par Laurence Portier et publiés dans [Portier et al. 00]. Il s'agit d'essais 1D et 2D réalisés à température ambiante sur un acier inoxydable de type 316L appelé acier COTHAA et dont la composition pondérale est reportée dans le tableau 3.5. Cet acier a été développé spécialement pour le programme nucléaire français et il est utilisé dans les circuits secondaires des centrales R. E. P. (réacteur à eau sous pression). La taille moyenne des grains de l'acier COTHAA est de  $30\mu m$ . Cet acier n'est que très légèrement différent de l'acier inoxydable présenté dans le premier chapitre mais cette différence se ressent néanmoins sur son comportement mécanique.

#### 3.3.5.2 Prise en compte du phénomène de surécrouissage

Parmi les essais utilisés pour identifier le modèle à distorsion, nous avons retenu un essai cyclique sous chargement non-proportionnel et piloté en déformation, de manière à représenter le phénomène bien connu pour ce matériau de surécrouissage lors de tels trajets [Calloch 97]. Pour modéliser cet aspect, nous avons repris l'hypothèse faite dans la plupart des modèles macroscopiques, à savoir que le surécrouissage peut être convenablement décrit par une augmentation de la taille du domaine d'élasticité. Cette hypothèse est semble-t'il en contradiction avec les récents travaux de Bocher et al. [Bocher et al. 01] sur un acier inoxydable 316L qui montrent que lors de trajets non-proportionnels, le surécrouissage serait surtout dû à une translation du domaine d'élasticité plus importante que lors de trajets proportionnels. Néanmoins, nous verrons que la modélisation retenue nous permet de bien décrire les réponses expérimentales.

Nous utilisons ainsi le modèle proposé par Tanaka [Tanaka 94]. Tanaka introduit un "tenseur structural"  $\underline{\underline{C}}$  qui suit la loi d'évolution suivante :

$$\dot{C}_{ij} = C_c [u_i u_j - C_{ij}] \dot{p} \quad i = 1, 2 \quad j = 1, 2 \quad (3.43)$$

avec  $u_i = \dot{\epsilon}_i^p / \|\dot{\epsilon}^p\|$ . Ce tenseur structural est utilisé pour définir un facteur de non-proportionnalité  $A$  :

$$A = \sqrt{\frac{C_{ij}C_{ij} - u_k C_{kl} C_{lm} u_m}{C_{ij}C_{ij}}} \quad (3.44)$$

Ainsi,  $A = 0$  pour des chargements uniaxiaux et plus  $A$  est proche de 1, plus le chargement “est non-proportionnel”.

L’effet d’amplitude est modélisé par une surface mémoire définie dans l’espace des déformations plastiques. Cette surface est une hypersphère centrée en  $\underline{Y}$  et de rayon  $q$ . Ces deux variables sont définies par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{Y}_i = r_y (\epsilon_i^p - Y_i) \dot{p} \\ q = \|\epsilon^p - Y\| \end{cases} \quad (3.45)$$

Finalement,  $R_{1\infty}$  est une fonction de  $A$  et  $q$  :

$$R_{1\infty} = A [q_N(q) - q_P(q)] + q_P(q) \quad (3.46)$$

où  $q_N(q)$  et  $q_P(q)$  sont les valeurs asymptotiques de l’écrouissage isotrope sous chargement non-proportionnel ( $A = 1$ ) et proportionnel ( $A = 0$ ) respectivement. Nous choisissons la forme la plus simple pour  $q_N(q)$  et  $q_P(q)$  :

$$\begin{cases} q_N(q) = a_N q \\ q_P(q) = a_P q \end{cases} \quad (3.47)$$

### 3.3.5.3 Bilan des équations du modèle et analyse des résultats

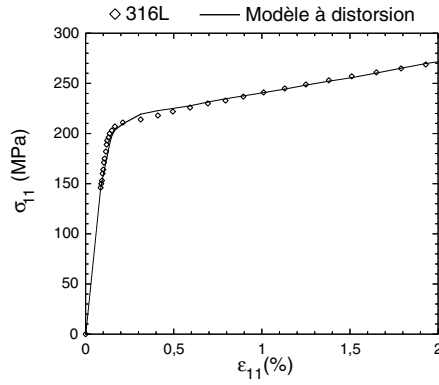
Nous reportons dans le tableau 3.6 l’ensemble des équations du modèle à distorsion, y compris celles permettant de représenter le phénomène de surécrouissage. Pour identifier ce modèle, nous suivons la démarche d’identification présentée dans le tableau 3.7, et qui diffère légèrement de celle suivie précédemment. Les résultats d’identification sont reportés sur la figure 3.34 et sur la figure 3.35.

Contrairement à ce que prédit le modèle polycristallin, la zone de transition élastoplastique du matériau est relativement rapide sur l’essai de traction (Fig. 3.34(a)). L’apparition de la plasticité semble avoir lieu aux alentours de 200 MPa. Or, l’essai de rochet uniaxial (Fig. 3.34(c)) produit de la déformation progressive pour une amplitude de contrainte inférieure à 400 MPa, c’est-à-dire inférieure à deux fois la limite d’élasticité apparente sur la courbe de traction. Si l’on fait le choix de représenter le comportement du matériau par un modèle plastique sans prise en compte des phénomènes visqueux, l’essai de rochet nous impose alors de choisir une limite d’élasticité plus faible que la demi-amplitude de sollicitation. Nous obtenons ainsi une limite d’élasticité de 130 MPa. Le comportement en traction à partir de 130 MPa est alors représenté par l’écrouissage du matériau, y compris dans la zone comprise entre 130 et 200 MPa, limite apparente d’élasticité. Cela signifie que les écrouissages cinématiques du modèle doivent être capables de représenter un comportement proche de l’élasticité en ayant un module très élevé dans cette région. Lors de l’identification du modèle à distorsion avec le modèle polycristallin, nous n’avions pas rencontré ce

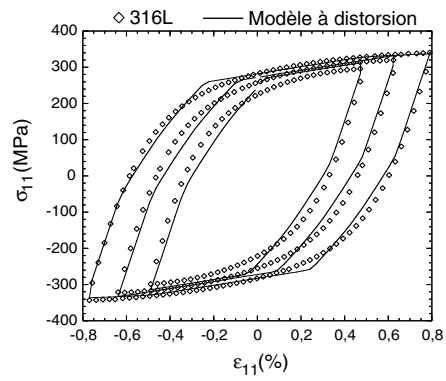
Surface seuil	$F = \hat{S}_1^2 - 2\hat{S}_1 t_1 (d_{(1)k} t_k) - t_1^2 (R_{(1)}^2 - d_{(i)k} d_{(i)k}) = 0$ <p>avec <math>t_2 = \frac{\hat{S}_2}{R_{(2)}}</math> et <math>t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - t_2^2}</math></p>
Écrouissage Isotrope	$\dot{R}_{(1)} = b (R_\infty - R_{(1)}) \dot{p} \text{ et } \dot{R}_{(2)} = (1 + \delta) \dot{R}_{(1)}$ <p>avec <math>R_{1\infty} = A [q_N(q) - q_P(q)] + q_P(q) + S_0</math></p> <p>où <math>\begin{cases} q_N(q) = a_N q \\ q_P(q) = a_P q \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \dot{Y}_i = r_y (\epsilon_i^p - Y_i) \dot{p} \\ q = \ \epsilon^p - Y\  \end{cases}</math></p> <p>et où <math>A = \sqrt{\frac{C_{ij}C_{ij} - u_k C_{kl} C_{lm} u_m}{C_{ij}C_{ij}}}</math></p> <p>avec <math>\dot{C}_{ij} = C_c [u_i u_j - C_{ij}] \dot{p} \text{ et } u_i = \dot{\epsilon}_i^p / \ \dot{\epsilon}^p\ </math></p>
Écrouissage Cinématique	$\begin{cases} \dot{d}_{(1)1} = C_{(1)1} \left( \dot{\epsilon}_1^p - \left( \frac{\gamma_{(1)1} \Phi_{(1)1}(p)  d_{(1)1} }{R_{(1)}} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)1}}{ d_{(1)1} } \dot{p} \right) \\ \dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\epsilon}_2^p - \left( \frac{ d_{(1)2} }{\frac{R_{(2)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)2}}{ d_{(1)2} } \dot{p} \right) \end{cases}$ <p>avec <math>\Phi_{(1)1}(p) = \Phi_{(1)1\infty} + (1 - \Phi_{(1)1\infty}) e^{-\omega p}</math></p> $\dot{X}_{(n)i} = C_{(n)} \left( \dot{\epsilon}_i^p - \left( \gamma_{(n)} \Phi_{(n)}(p) \ \underline{X}_{(n)}\  \right)^{m_{(n)}+1} \frac{X_{(n)i}}{\ \underline{X}_{(n)}\ } \dot{p} \right) \quad n = 2, 3$ <p>avec <math>\Phi_{(n)}(p) = \Phi_{(n)\infty} + (1 - \Phi_{(n)\infty}) e^{-\omega p}</math></p>
Rotation du système de coordonnées mobile	$\dot{\phi} = C_\phi \text{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right) \left  \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right ^{m_\phi} \dot{p}$

TAB. 3.6 – Résumé des équations du modèle à distorsion “Distor2D” pour le cas de chargements biaxiaux et prenant en compte le phénomène de surécrouissage

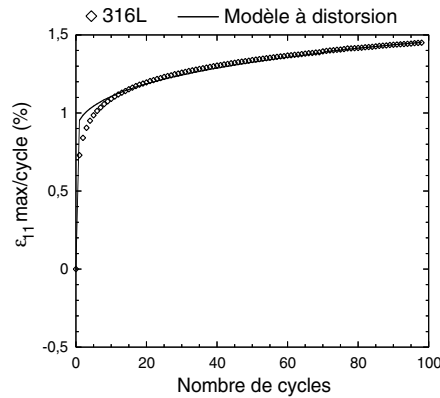




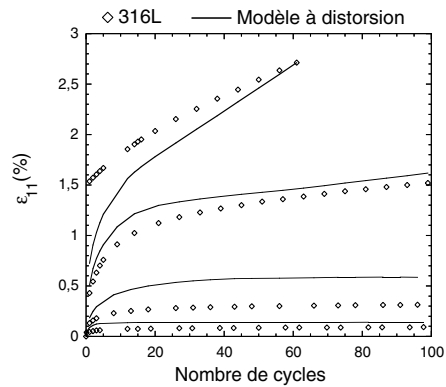
(a) Identification du modèle à distortion sur un essai de traction monotone



(b) Identification du modèle à distortion sur des essais d'écroutissage cyclique uniaxial



(c) Identification du modèle à distortion sur un essai de rochet uniaxial :  $\sigma_{11} = 100 \pm 140$  MPa



(d) Identification du modèle à distortion sur des essais de rochet biaxial :  $\sigma_{11} = 80$  MPa et  $\epsilon_{12} = \pm 0,1, \pm 0,2, \pm 0,5$  et  $\pm 0,75\%$

FIG. 3.34 – Identification du modèle à distortion avec des résultats d'essais réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L

Étapes d'identification	Paramètres dépendant du matériau	Essais
1	$E, \nu, S_0, C_{(1)1}, \gamma_{(1)1}, C_{(2)}, \gamma_{(2)}, C_{(3)}, \gamma_{(3)}, C_{(4)}, \gamma_{(4)}, K, n$	Traction monotone
2	$b, a_p, r_Y, \omega, \Phi_{(1)1\infty}, \Phi_{(2)\infty}, \Phi_{(3)\infty}, \Phi_{(4)\infty}$	Écrouissage cyclique uniaxial
3	$m_{(1)1}, m_{(2)}, m_{(3)}, m_{(4)}, C_\phi, m_\phi, \delta, C_{(1)2}, \gamma_{(1)2}, m_{(1)2}, a_N, C_c$	Rochet uniaxial Rochet biaxial Surécrouissage
4	Tous les coefficients	Tous les essais

TAB. 3.7 – *Stratégie d'identification du modèle à distorsion “Distor2D” prenant en compte le phénomène de surécrouissage*

type de comportement et nous pouvions attribuer aux variables de distorsion un module un peu plus élevé qu'aux autres variables d'écrouissage cinématique. Ici, nous ne pouvons plus appliquer ce raisonnement, car si tout le comportement entre 130 et 200 MPa est représenté exclusivement par les variables de distorsion, cela entraîne une grande différence d'évolution entre variables de distorsion et variables de translation pure du domaine d'élasticité. Or, cette différence n'est justifiée par aucune observation expérimentale, la distorsion apparaissant certes rapidement mais en étant toujours accompagnée d'une translation du domaine d'élasticité. Cette remarque nous impose de décrire le comportement de traction entre 130 et 200 MPa par deux variables, l'une de distorsion et l'autre de translation du repère mobile. Ces deux variables doivent posséder un fort module d'écrouissage et un niveau de saturation correspondant à une contrainte totale de 200 MPa. La suite du comportement de traction est décrite par deux écrouissages cinématiques comme nous l'avons fait précédemment. Nous introduisons donc un écrouissage cinématique supplémentaire par rapport à l'identification du modèle avec le modèle polycristallin.

Les courbes d'écrouissage cyclique apparaissent linéaires par morceaux (Fig. 3.34(b)). Cela est dû aux coefficients  $m_i$  des lois d'évolution des écrouissages cinématiques. En effet, ces exposants gèrent la vitesse de rochet prévue par le modèle : plus ils sont élevés, plus les écrouissages cinématiques ont un comportement linéaire jusqu'à leur valeur de saturation et plus le taux de rochet est faible. Pour diminuer la déformation progressive prévue par le modèle, on est souvent obligé de prendre des valeurs non négligeables pour les exposants  $m_i$ , ce qui dégrade la description des boucles d'hystérésis ( $\epsilon - \sigma$ ), à moins que l'on augmente le nombre de variables d'écrouissage cinématique [Ohno et Wang 93]. Ici, nous souhaitons limiter autant que faire se peut le nombre de variables et de coefficients du modèle quitte à commettre quelques erreurs de prévi-

sion.

Dans l'identification faite avec le modèle polycristallin, nous avons utilisé les résultats de 3 "essais" de rochet uniaxial pour déterminer les coefficients  $m_i$  des lois d'évolution des écrouissages cinématiques (sauf l'exposant  $m_{(1)2}$  utilisé pour la variable de distorsion  $d_{(1)2}$  puisqu'il ne joue un rôle que pour des trajets non-proportionnels). Ici, nous ne pouvons pas identifier convenablement ces coefficients avec le seul essai de rochet uniaxial. Nous avons donc identifié les coefficients  $m_i$  simultanément sur l'essai de rochet uniaxial et sur les essais de rochet biaxial présentés figure 3.34(d). Cette méthode n'est pas très satisfaisante puisque nous ne pouvons pas prétendre que le modèle sera capable de décrire une large plage d'essais de rochet uniaxial.

Les quatre essais de rochet biaxial ont été réalisés sur une même éprouvette, par paliers croissants d'amplitude de chargement. Toutefois, le comportement du matériau n'est pas sensible à un tel enchaînement et nous pouvons donc considérer que chaque palier donne les mêmes résultats que ceux que l'on aurait obtenus sur une éprouvette vierge. Nous simulons donc chaque trajet de chargement indépendamment les uns des autres, ce qui explique les écarts importants entre les prévisions du modèle à distorsion et les résultats expérimentaux dans les tout premiers cycles.

Concernant l'essai mettant en évidence le phénomène de surécrouissage (Fig. 3.35), on peut remarquer que les courbes contrainte - déformation sont particulièrement bien décrites par le modèle à distorsion. Elles sont en fait bien mieux décrites que par un modèle basé sur le domaine d'élasticité de von Mises et contenant les mêmes variables internes, excepté les variables de distorsion qui sont remplacées par des écrouissages cinématiques classiques (Fig. 3.36). La distorsion du domaine d'élasticité peut donc également jouer un rôle favorable dans la description de ce type de chargements. Cela signifie aussi que l'essai de surécrouissage doit être pris en compte pour l'identification de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile. En effet, un autre jeu de coefficients pour cette loi peut donner des résultats plus mauvais que ceux obtenus avec le modèle de von Mises.

La réponse du modèle sur l'ensemble des essais est correcte. Il faut noter que la distorsion de la surface seuil, telle qu'elle a été modélisée ici, permet de limiter le rochet multiaxial mais ne parvient pas à représenter les fortes différences entre les cinétiques de rochet d'un essai à l'autre. Dans l'identification faite avec le modèle polycristallin, tous les "essais" de rochet 2D donnaient une déformation progressive dont le pas devenait très faible au bout d'un certain nombre de cycles. Ici, l'essai à  $\sigma_{11} = 80$  MPa et  $\varepsilon_{12} = \pm 0,75\%$  produit une déformation progressive dont le pas est beaucoup plus élevé que pour les autres essais de rochet 2D, y compris celui où  $\sigma_{11} = 80$  MPa et  $\varepsilon_{12} = \pm 0,5\%$ . Le modèle parvient à reproduire ce phénomène en jouant sur les valeurs à saturation des écrouissages cinématiques. En effet, si l'on trace la courbe  $\varepsilon_{12} - \sigma_{12}$  au cours de ces deux dernières simulations, on obtient un écrouissage cyclique qui, dans l'essai à plus forte amplitude, sature la troisième variable d'écrouissage cinématique  $X_{(3)}$  alors que dans l'essai où  $\varepsilon_{12} = \pm 0,5\%$ ,  $X_{(3)}$  n'est pas encore à sa limite. En choisissant ensuite convenablement l'exposant  $m_{(3)}$ ,  $X_{(3)}$  suit une évolution quasi-linéaire

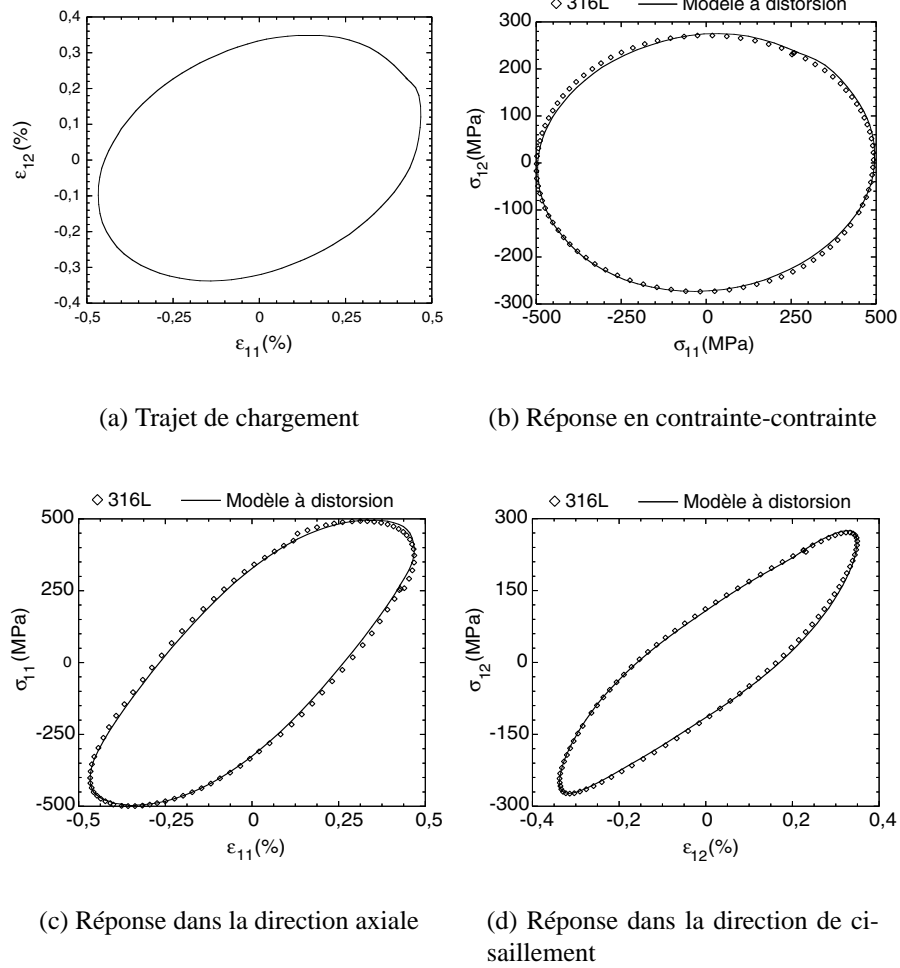


FIG. 3.35 – Identification du modèle à distorsion avec des résultats d'essais de sur-écrouissage réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L

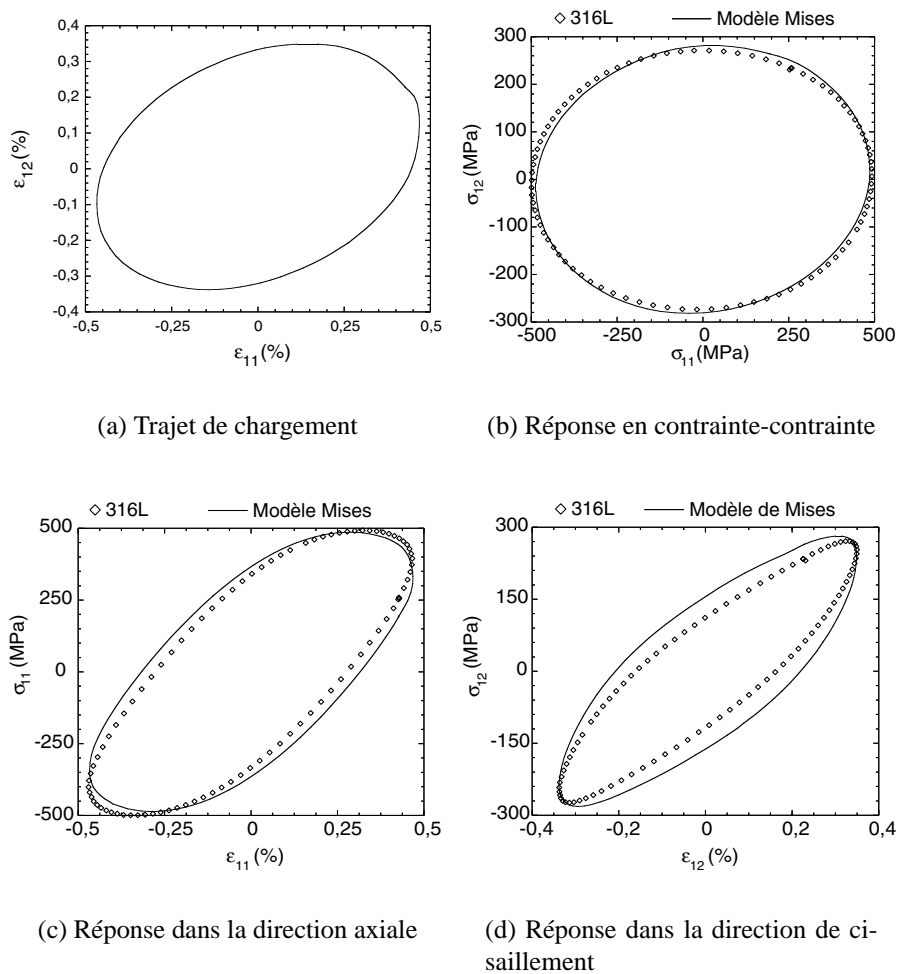


FIG. 3.36 – Identification d'un modèle macroscopique basé sur le domaine d'élasticité de von Mises avec les résultats d'essai de surécrouissage réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L

dans l'essai à faible amplitude mais non-linéaire, donc génératrice de rochet, dans l'essai à forte amplitude. Cette démarche d'identification est critiquable dans le sens où il est difficile de prévoir la réponse du modèle dans un cas intermédiaire. Toutefois, si l'on souhaite une réponse très précise du modèle, il est probable qu'une augmentation du nombre de variables d'écroissage cinématique devrait améliorer les choses. Les coefficients du modèle à distorsion identifiés avec les essais réalisés sur l'acier inoxydable 316L sont reportés dans le tableau 3.8 [Vincent *et al.* 02a]. Les remarques faites lors de la précédente identification restent valables concernant les coefficients  $\delta$ ,  $C_{(1)2}$  et  $\phi_{4\infty}$ .

Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$S_0$	106 MPa
$b$	16	$a_p$	0	$a_n$	80000 MPa
$C_c$	2,1	$r_Y$	40,75	$\delta$	0
$C_{(1)1}$	60000 MPa	$\gamma_{(1)1}$	4,7	$m_{(1)1}$	0,83
$C_2$	60000 MPa	$\gamma_2$	$3,56 \cdot 10^{-2}$	$m_2$	17,9
$C_3$	5000 MPa	$\gamma_3$	$9 \cdot 10^{-2}$	$m_3$	20
$C_4$	1800 MPa	$\gamma_4$	$9,19 \cdot 10^{-3}$	$m_4$	2,85
$C_{(1)2}$	$= C_{(1)1}$	$\gamma_{(1)2}$	1,75	$m_{(1)2}$	20
$\phi_{(1)1\infty}$	0,53	$\phi_{2\infty}$	0,35	$\phi_{3\infty}$	0,4
$\phi_{4\infty}$	1	$\omega$	8	$C_\phi$	1050
$m_\phi$	5,6	$n$	24	$K$	$10 \text{ MPa} \cdot s^{1/n}$

TAB. 3.8 – *J*

Coefficients du modèle à distorsion identifiés avec les essais réalisés sur l'acier inoxydable COTHAA de type 316L, d'après [Vincent *et al.* 02a]

Nous utilisons enfin le même essai de validation que lors de la comparaison du modèle à distorsion et du modèle polycristallin. Il s'agit d'un essai de rochet 2D "papillon" où la contrainte axiale ne reste pas fixe au cours du chargement. La réponse du modèle est assez satisfaisante (Fig. 3.37).

### 3.4 Conclusion

Après avoir choisi le modèle à distorsion proposé par Kurtyka et Życzkowski permettant de représenter convenablement la plupart des distorsions de surfaces seuil recensées dans la littérature, nous avons montré que l'utilisation de ce modèle ne donnait pas de bons résultats tant du point de vue du comportement du matériau (courbes  $(\epsilon - \sigma)$ ) que de la forme et de la position des surfaces seuil au cours d'un trajet classique de rochet biaxial. La raison de cet échec a pu être mise en évidence en ayant recours à un modèle polycristallin qui ne nous limitait pas quant au nombre d'"essais" nécessaires à la démonstration. Il a ainsi été montré que l'hypothèse simplificatrice

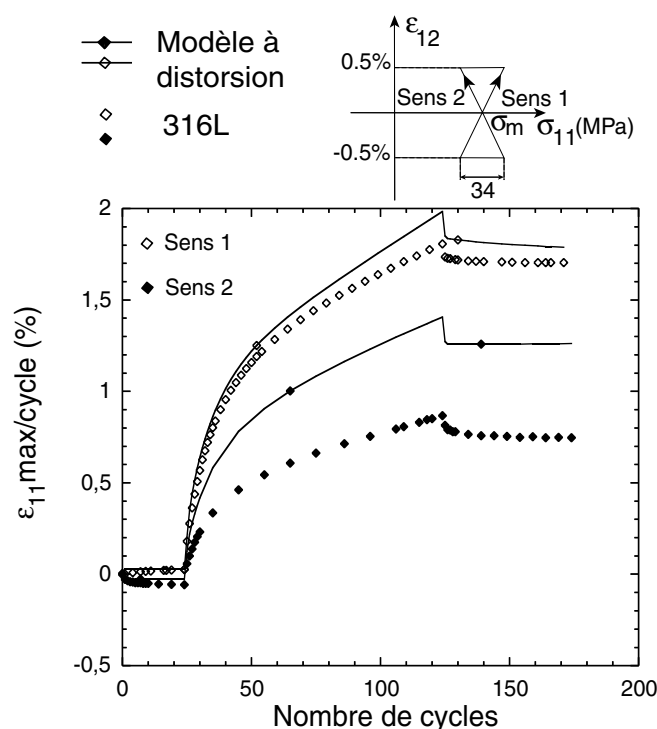


FIG. 3.37 – Validation du modèle à distorsion sur un essai papillon

proposée par les auteurs du modèle était trop restrictive pour ce type de chargement compte tenu des équations d'évolution que nous avons proposées. Le modèle à distorsion ne pouvait pas décrire la forme des surfaces seuil obtenues numériquement par le modèle polycristallin et surestimait de fait la déformation progressive. Ce résultat ne remet pas en cause notre choix du modèle à distorsion dans la mesure où aucun des autres modèles phénoménologiques recensés dans le précédent chapitre n'est capable non plus de décrire correctement les résultats expérimentaux sans de profondes modifications. Nous sommes donc revenu au cadre plus général du modèle à distorsion proposé par [Kurtyka et Życzkowski 96] et nous avons pu proposer une nouvelle simplification de ce modèle, qui a ensuite été identifiée avec succès sur des "essais numériques" réalisés avec le modèle polycristallin cité plus haut et sur des essais (réels) réalisés par Portier [Portier 99] sur un acier inoxydable de type 316L. L'écrouissage monotone, l'écrouissage cyclique, le surécrouissage et le rochet uniaxial et biaxial sont correctement décrits par cette nouvelle version du modèle à distorsion appelée "Distort2D" (voir [Vincent *et al.* 02a] dans l'annexe C).

Ce modèle doit maintenant être étendu au cas de chargements de dimension supérieure à 2 afin qu'il puisse être utilisé dans des calculs de structures tridimensionnelles. Le principal changement par rapport au modèle tel qu'il a été présenté dans ce chapitre concerne la rotation du repère mobile, qui ne peut plus être décrite par un seul angle mais par une matrice de rotation de dimension (5x5). Dans le chapitre suivant, nous

nous attachons à décrire le choix que nous avons fait pour l'équation d'évolution de cette matrice ainsi que la procédure d'intégration spécifique à cette équation d'évolution.



# Chapitre 4

## Extension du modèle 2D à des trajets quelconques

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>142</b>
<b>4.2</b>	<b>Loi d'évolution pour la matrice de rotation <math>\mathbb{Q}</math></b>	<b>143</b>
4.2.1	Forme adéquate du tenseur "taux de rotation" du repère mobile	143
4.2.2	Intégration de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile	146
4.2.2.1	Paramètres de Rodrigues classiques dans un espace de dimension supérieure à trois	147
4.2.2.2	Paramètres de Rodrigues modifiés dans un espace de dimension supérieure à trois	148
4.2.2.3	Extension illimitée du domaine de description d'une rotation principale grâce aux paramètres de Rodrigues modifiés associés	151
4.2.3	Choix du deuxième vecteur utilisé pour construire le tenseur taux de rotation	151
<b>4.3</b>	<b>Identification du modèle 5D sur des essais biaxiaux</b>	<b>153</b>
<b>4.4</b>	<b>Identification sur des essais de dimension supérieure à 2</b>	<b>153</b>
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>161</b>

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons montré les possibilités du modèle à distorsion en ce qui concerne la prévision du phénomène de rochet biaxial. Même si les résultats d'essais pour des chargements de dimension supérieure à deux sont rares, nous souhaitons néanmoins écrire une version du modèle qui soit valable pour des trajets 3D, 4D et 5D dans l'espace des déviateurs<sup>1</sup>. Notre objectif est en effet d'implanter le modèle de comportement dans un code de calcul aux éléments finis pour simuler le comportement de structures réelles 3D. Dans ce cas, toutes les équations du modèle à distorsion proposé dans le chapitre précédent restent valables, sauf l'équation qui gère la rotation du repère mobile. Dans le cas de chargements biaxiaux, la rotation du repère mobile est décrite par un seul angle, que nous avons appelé  $\phi$ , mais dans le cas de chargements de dimension 5 dans l'espace des déviateurs, plusieurs angles sont nécessaires pour décrire la rotation du repère mobile. Le lien entre ces angles et des variables "mécaniques" n'est plus du tout évident ; il en va de même pour l'écriture de lois d'évolution adéquates pour ces angles.

Dans leur papier [Kurtyka et Życzkowski 96], Kurtyka et Życzkowski proposent de décrire la rotation du repère mobile à l'aide d'une loi d'évolution écrite directement sur la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$  (5,5) du repère mobile, matrice qui est définie de la façon suivante :

$$\dot{\omega}_i = Q_{ij}\omega_j \quad (4.1)$$

La loi d'évolution s'appuie alors sur la propriété d'orthogonalité de la matrice de rotation :

$$\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{I} \quad (4.2)$$

de laquelle on déduit :

$$\dot{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^T + \mathbb{Q}\dot{\mathbb{Q}}^T = \mathbb{O} \quad (4.3)$$

et donc :

$$-\Omega = \dot{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^T = -\mathbb{Q}\dot{\mathbb{Q}}^T = -(\dot{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^T)^T = \Omega^T \quad (4.4)$$

On obtient ainsi, d'après (4.2) et la première égalité de (4.4), une loi d'évolution pour  $\mathbb{Q}$  :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega\mathbb{Q} \quad (4.5)$$

où  $\Omega$  est un tenseur appelé "taux de rotation" qui doit nécessairement être antisymétrique. Nous reviendrons plus tard sur la méthode retenue pour intégrer cette équation différentielle particulière.

Pour choisir convenablement la matrice "taux de rotation", nous nous appuyons tout d'abord sur des observations expérimentales [Rousset 85] qui montrent que la direction de la distorsion des surfaces seuil semble suivre le point de chargement, avec un certain retard. Notons au passage qu'il n'y a alors pas de rotation apparente de ces surfaces pour un trajet proportionnel.

---

1. C'est-à-dire pour tout chargement multiaxial de dimension 3 dans l'espace physique.

D'autre part, les lois d'évolution des variables de distorsion  $d_{(1)j}$  du modèle sont écrites de telle sorte que la direction  $\underline{\hat{\omega}}_1$  du repère mobile corresponde à la direction de la distorsion de la surface seuil. Par conséquent, la "rotation" apparente des surfaces seuil sera décrite par une rotation du repère mobile.

Ainsi,  $\mathbb{Q}$  doit être choisie de telle sorte que :

1.  $\dot{\mathbb{Q}}$  soit nul lors d'un chargement proportionnel et non nul lors d'un chargement non-proportionnel,
2.  $\dot{\mathbb{Q}}$  évolue de telle sorte que la direction  $\underline{\hat{\omega}}_1$  du repère mobile "suive" le point courant.

Kurtyka et Życzkowski ont proposé une écriture du tenseur taux de rotation  $\mathbb{Q}$  qui satisfait la première condition ci-dessus [Kurtyka et Życzkowski 96] :

$$\mathbb{Q} = f(\text{variables internes}) \left[ \underline{m}_{(1)} \otimes \underline{m}_{(2)} - \underline{m}_{(2)} \otimes \underline{m}_{(1)} \right] \dot{p} \quad (4.6)$$

avec  $\otimes$  le produit tensoriel des deux vecteurs  $\underline{m}_{(1)}$  et  $\underline{m}_{(2)}$ . Ces deux vecteurs devront être colinéaires pour tout chargement proportionnel (ce qui donne un taux de rotation nul) et non colinéaires si le repère mobile doit tourner.

Il reste à choisir convenablement ces vecteurs  $\underline{m}_{(1)}$  et  $\underline{m}_{(2)}$  de manière à ce que la seconde condition soit respectée.

## 4.2 Nouvelle loi d'évolution pour la rotation du repère mobile

### 4.2.1 Forme adéquate du tenseur "taux de rotation" du repère mobile

Dans cette partie, nous détaillons les choix faits pour développer l'équation d'évolution (4.6) qui permet de faire tourner le repère mobile "dans le bon sens". Par souci de simplicité, nous considérons pour l'instant que la "fonction de variables internes"  $f$  est une simple constante,  $C_\phi$ . L'équation (4.6) devient donc :

$$\mathbb{Q} = C_\phi \left[ \underline{m}_{(1)} \otimes \underline{m}_{(2)} - \underline{m}_{(2)} \otimes \underline{m}_{(1)} \right] \dot{p} \quad (4.7)$$

Nous avons ensuite recensé les vecteurs "mécaniques" susceptibles de convenir pour la construction du tenseur  $\mathbb{Q}$  :

$$\underline{\dot{\varepsilon}}^p, \underline{S} - \underline{X}, \underline{\dot{S}}, \underline{\hat{\omega}}_1, \underline{X}, \underline{\dot{X}}, \underline{\varepsilon}^p$$

Tous ces vecteurs sont en effet colinéaires pour un chargement proportionnel mais ne le restent pas lors d'un trajet non-proportionnel.

Etant donné que le vecteur  $\underline{\hat{\omega}}_1$  donne la direction de la distorsion des surfaces seuil, il

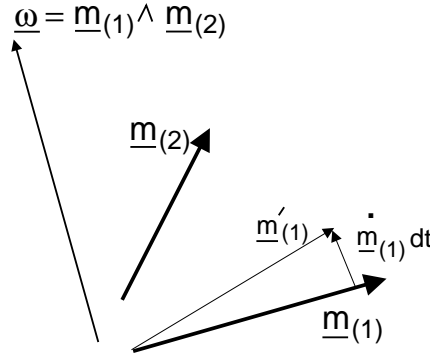


FIG. 4.1 – Illustration de la stratégie retenue pour rapprocher deux vecteurs dans un espace à trois dimensions

nous est apparu judicieux de le retenir pour l'équation d'évolution de  $\Omega$  en prenant par exemple  $\underline{m}_{(1)} = \underline{\hat{\omega}}_1$  car cela nous permet d'écrire une loi d'évolution de la rotation du repère mobile qui reste valable quelle que soit sa position actuelle (définie en partie par  $\underline{\hat{\omega}}_1$ ). En effet, en choisissant  $\underline{m}_{(1)} = \underline{\hat{\omega}}_1$ , la rotation du repère mobile devient uniquement fonction de la direction du vecteur  $\underline{m}_{(2)}$  dans le repère mobile actuel. Autrement dit, nous menons exactement le même raisonnement que pour le modèle 2D, lorsque nous avons écrit la loi d'évolution de l'angle de rotation  $\phi$  en fonction de  $\underline{\hat{S}}$  et non de  $\underline{S}$ . Nous reviendrons sur le choix de  $\underline{m}_{(2)}$  une fois que nous aurons complètement défini l'équation (4.6).

Une fois  $\underline{m}_{(1)}$  et  $\underline{m}_{(2)}$  choisis, l'important est que la loi d'évolution (4.5) permette que ces deux vecteurs se rapprochent dès qu'ils ont été écartés par un chargement non-proportionnel. Pour cela, nous considérons le cas d'un chargement 3D, facile à représenter graphiquement (Fig. 4.1). Pour que le vecteur  $\underline{m}_{(1)}$  se rapproche du vecteur  $\underline{m}_{(2)}$ , on peut définir un troisième vecteur  $\underline{\omega}$  autour duquel le vecteur  $\underline{m}_{(1)}$  va tourner ( $\underline{m}_{(2)}$  étant considéré fixe durant l'incrément de chargement  $dt$ ). On choisit donc naturellement pour  $\underline{\omega}$  le produit vectoriel de  $\underline{m}_{(1)}$  et  $\underline{m}_{(2)}$  :

$$\underline{\omega} = \underline{m}_{(1)} \wedge \underline{m}_{(2)} \quad (4.8)$$

Ainsi, si l'on considère que  $\underline{\omega}$  est un vecteur taux de rotation, on obtiendra le nouveau vecteur tourné  $\underline{m}'_{(1)}$  par la relation :

$$\underline{m}'_{(1)} = \underline{m}_{(1)} + \underline{\dot{m}}_{(1)} dt = \underline{m}_{(1)} + k \left( \underline{\omega} \wedge \underline{m}_{(1)} \right) dt \quad (4.9)$$

avec  $k$  une constante positive suffisamment faible pour que le vecteur  $\underline{m}_{(1)}$  ne dépasse pas  $\underline{m}_{(2)}$  durant l'incrément de temps  $dt$ .

Le vecteur  $\underline{\omega}$  s'écrit dans le repère principal :

$$(\underline{\omega}) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

ou en écriture matricielle :

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

Dans un espace à trois dimensions, on obtient en effet le même résultat par les opérations  $\underline{\omega} \wedge \underline{m}_{(1)}$  ou  $\omega_{ij}m_{(1)j}$ . Or, il est facile de montrer dans ce cas que la matrice :

$$M_{ij} = [m_{(1)i}m_{(2)j} - m_{(2)i}m_{(1)j}] \quad (4.12)$$

est l'écriture matricielle du vecteur taux de rotation  $-\underline{\omega} = \underline{m}_{(2)} \wedge \underline{m}_{(1)}$ . Par conséquent, le vecteur  $\underline{m}_{(1)}$  se rapprochera du vecteur  $\underline{m}_{(2)}$  si le vecteur  $\dot{\underline{m}}_{(1)}$  est construit de la manière suivante (voir Eq. (4.9)) :

$$\dot{\underline{m}}_{(1)} = -k\mathbb{M}\underline{m}_{(1)} \quad (4.13)$$

L'intérêt de cette écriture matricielle est qu'elle est également valable dans un espace de dimension supérieure à 3. Or, le tenseur taux de rotation  $\mathbb{Q}$  introduit dans l'équation d'évolution de la matrice de rotation du repère mobile peut s'écrire :

$$\mathbb{Q} = C_\phi \mathbb{M} \dot{p} \quad (4.14)$$

Par conséquent,  $\underline{m}_{(1)}$  se rapprochera de  $\underline{m}_{(2)}$  s'il suit l'équation d'évolution suivante :

$$\dot{\underline{m}}_{(1)} = -\mathbb{Q}\underline{m}_{(1)} \quad (4.15)$$

D'autre part, nous avons fait le choix de  $\underline{m}_{(1)} = \underline{\hat{w}}_1$  ; nous souhaitons donc obtenir :

$$\dot{\underline{\hat{w}}}_1 = -\mathbb{Q}\underline{\hat{w}}_1 \quad \text{ou} \quad \dot{\hat{w}}_{1i} = -\Omega_{ij}\hat{w}_{1j} \quad (4.16)$$

pour que  $\underline{\hat{w}}_1$  se rapproche du point de chargement défini par  $\underline{m}_{(2)}$ . Or, d'après la définition donnée en (4.1) de la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$ , le vecteur  $\underline{\hat{w}}_1$  a pour coordonnées  $\hat{w}_{1i} = Q_{1i}$  dans le repère fixe. Par conséquent, l'équation (4.16) s'écrit :

$$\dot{Q}_{1i} = -\Omega_{ij}Q_{1j} \quad (4.17)$$

Finalement, l'équation d'évolution complète de la matrice de rotation devient :

$$\dot{Q}_{ki} = -\Omega_{ij}Q_{kj} \quad \text{ou} \quad \dot{\mathbb{Q}}^T = -\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T \quad (4.18)$$

Or,  $\mathbb{Q}$  est une matrice antisymétrique, donc l'équation (4.18) est équivalente à :

$$\dot{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}\mathbb{Q} \quad (4.19)$$

au lieu de l'équation (4.5) proposée initialement. Toutefois, nous pouvons retrouver cette écriture :

$$\boxed{\dot{\mathbb{Q}} = -\mathbb{Q}'\mathbb{Q}} \quad (4.20)$$

en introduisant

$$\boxed{\mathbb{Q}' = -\mathbb{Q}\mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = -\mathbb{Q}\left(C_\phi\left[\underline{\hat{w}}_1 \otimes \underline{m}_{(2)} - \underline{m}_{(2)} \otimes \underline{\hat{w}}_1\right]\dot{p}\right)\mathbb{Q}^T} \quad (4.21)$$

On remarque au passage que la nouvelle matrice taux de rotation  $\mathbb{Q}'$  est bien antisymétrique.

### 4.2.2 Intégration de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile

L'équation d'évolution (4.20) de la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$  du repère mobile est particulière dans le sens où cette matrice doit rester orthogonale tout au long du trajet de chargement. Or, habituellement, on intègre les équations d'évolution de variables internes, pas à pas, de la manière suivante :

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \dot{u}(t)\Delta t \quad (4.22)$$

Ici, cette démarche ne peut pas s'appliquer puisque le tenseur  $\dot{\mathbb{Q}}(t)\Delta t + \mathbb{Q}(t)$  n'est *a priori* pas orthogonal. Nous devons donc recourir à d'autres stratégies.

Il s'agit d'une difficulté classique dans les problèmes de mécanique écrits en grandes transformations (et contenant donc de grandes rotations) mais aussi dans certains problèmes de robotique. Nous nous sommes appuyés sur les travaux de Schaub *et al.* et nous invitons le lecteur à se reporter à leur publication [Schaub *et al.* 95] pour de plus amples informations. Les auteurs proposent une méthode qui permet de traiter l'intégration de la loi d'évolution de  $\mathbb{Q}$  comme une équation différentielle "classique" définie en (4.22). Le principal avantage est que toutes les équations différentielles de notre modèle sont alors "cohérentes" entre elles, c'est-à-dire que les dérivées des variables internes sont toutes calculées au même instant. Le logiciel SiDoLo que nous utilisons pour intégrer ce système d'équations différentielles peut donc être considéré comme une "boîte noire" et nous n'avons pas à nous soucier, par exemple, de l'instant choisi pour estimer les dérivées des variables internes (dans d'autres méthodes au contraire [Hughes et Winget 80], il est nécessaire, pour intégrer l'équation (4.20), de calculer le tenseur vitesse angulaire  $\Omega'$  au demi pas de temps  $\frac{\Delta t}{2}$ ).

La méthode proposée par Schaub *et al.* [Schaub *et al.* 95] repose sur les paramètres de Rodrigues qui sont, comme les paramètres d'Euler en 3D, un moyen de représenter toute rotation comme une seule rotation autour d'un axe principal. Les paramètres de Rodrigues classiques, appelés aussi vecteur de Gibbs, sont un jeu de paramètres proportionnel au vecteur de rotation principal d'Euler. L'amplitude du vecteur est  $\tan(\phi/2)$  où  $\phi$  est l'angle de rotation principale. Ces paramètres sont singuliers pour  $\phi = \pm\pi$ .

Les paramètres de Rodrigues modifiés sont un jeu de paramètres toujours proportionnel au vecteur de rotation principale mais d'amplitude  $\tan(\phi/4)$ . La position singulière devient donc  $\phi = \pm 2\pi$ , ce qui double la plage de rotation principale possible par rapport aux paramètres de Rodrigues classiques.

Ces paramètres peuvent se généraliser à un espace de dimension supérieure à 3 et donc être utilisés pour représenter notre matrice de rotation  $\mathbb{Q}$ . Les paramètres de Rodrigues modifiés peuvent décrire toute rotation excepté une rotation de  $\pm 2\pi$ . Néanmoins, ces paramètres ne sont pas uniques et il existe un jeu de paramètres "associé" qui décrit exactement la même orientation physique, mais qui a un comportement singulier opposé. Ce jeu de paramètres associé est en effet singulier pour une rotation nulle.

Ainsi, avec le couple {Paramètres de Rodrigues modifiés, Paramètres de Rodrigues

modifiés associés}, nous pouvons décrire n'importe quelle rotation, ce qui est indispensable lorsque l'on s'intéresse à des chargements cycliques (par exemple un trajet circulaire).

#### 4.2.2.1 Paramètres de Rodrigues classiques dans un espace de dimension supérieure à trois

La transformation de Cayley permet de paramétrer une matrice orthogonale  $\mathbb{Q}$  de déterminant égal à 1 en fonction d'une matrice antisymétrique  $\mathbb{U}$  de la façon suivante :

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{I} - \mathbb{U}) (\mathbb{I} + \mathbb{U})^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{U})^{-1} (\mathbb{I} - \mathbb{U}) \quad (4.23)$$

et

$$\mathbb{U} = (\mathbb{I} - \mathbb{Q}) (\mathbb{I} + \mathbb{Q})^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{Q})^{-1} (\mathbb{I} - \mathbb{Q}) \quad (4.24)$$

Ce qui est remarquable dans cette transformation de Cayley, c'est que le passage de la matrice orthogonale à la matrice antisymétrique se fait exactement de la même façon que la transformation inverse. Toutefois, il faut aussi noter que ce type de transformation ne fonctionne pas avec des matrices orthogonales contenant des valeurs propres égales à -1 (d'où la singularité en  $\pm\pi$ ). En effet, la matrice  $(\mathbb{I} + \mathbb{Q})$  deviendrait alors singulière et ne serait donc plus inversible (eq. (4.24)).

La transformation de Cayley est une généralisation de la représentation d'une matrice orthogonale  $N \times N$  par les paramètres de Rodrigues classiques. La matrice antisymétrique  $\mathbb{U}$  est quant à elle une généralisation du vecteur de Gibbs pour un espace de dimension supérieure à 3. Si l'on considère pour  $\mathbb{Q}$  l'équation différentielle proposée en (4.20) :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega' \mathbb{Q} \quad (4.25)$$

la matrice antisymétrique  $\Omega'$  est alors reliée à  $\mathbb{U}$  et  $\dot{\mathbb{U}}$  par la relation suivante :

$$\dot{\mathbb{U}} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \mathbb{U}) \Omega' (\mathbb{I} - \mathbb{U}) \quad (4.26)$$

La matrice  $\dot{\mathbb{U}}$  est antisymétrique :

$$\dot{\mathbb{U}}^T = \frac{1}{2} (\Omega' - \Omega' \mathbb{U} + \mathbb{U} \Omega' - \mathbb{U} \Omega' \mathbb{U})^T = -\frac{1}{2} (\Omega' + \mathbb{U} \Omega' - \Omega' \mathbb{U} - \mathbb{U} \Omega' \mathbb{U}) = -\dot{\mathbb{U}} \quad (4.27)$$

si bien que  $\dot{\mathbb{U}}(t)\Delta t + \mathbb{U}(t)$  est également antisymétrique, ce qui permet d'intégrer l'équation (4.26) selon le même principe que celui présenté en (4.22). Ainsi, pour faire évoluer une matrice de rotation  $\mathbb{Q}$  selon une vitesse angulaire  $\Omega'$ , nous pouvons construire une matrice intermédiaire  $\mathbb{U}$  (eq. (4.24)), intégrer simplement son équation différentielle (4.26) puis reconstruire  $\mathbb{Q}$  grâce à l'équation (4.23).

Cette méthode est relativement simple mais nous retrouvons la singularité pour une rotation de  $\pm\pi$ , la matrice  $\mathbb{Q}$  possédant alors au moins une valeur propre égale à -1. C'est pourquoi nous passons aux paramètres de Rodrigues modifiés.

#### 4.2.2.2 Paramètres de Rodrigues modifiés dans un espace de dimension supérieure à trois

Les paramètres de Rodrigues modifiés permettent de doubler le domaine de description d'une rotation principale (on passe de  $\pm\pi$  à  $\pm 2\pi$ ). Une façon d'obtenir ces paramètres tout en conservant les mêmes avantages de construction que précédemment est de considérer la matrice  $\mathbb{W}$  racine carrée de la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$  :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{W}\mathbb{W} \quad (4.28)$$

Si l'on diagonalise la matrice  $\mathbb{Q}$ , alors la matrice racine carrée de  $\mathbb{Q}$  peut s'écrire comme la matrice diagonale contenant les racines carrées des valeurs propres de  $\mathbb{Q}$ , affectée des mêmes matrices de passage.

$$\text{si} \quad \mathbb{Q} = \mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}^* \quad (4.29)$$

$$\text{alors} \quad \mathbb{W} = \mathbb{P}\sqrt{\mathbb{D}}\mathbb{P}^* \quad (4.30)$$

avec  $*$  le symbole qui représente l'opérateur adjoint qui prend, dans le cas d'une matrice complexe, la transposée de cette matrice après avoir remplacé les complexes par leur conjugué.

La matrice  $\mathbb{Q}$  étant une matrice de rotation, son expression une fois diagonalisée a la structure suivante (dans le cas 5D qui nous intéresse) :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} e^{+i(\theta_1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta_1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+i(\theta_2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\theta_2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{P}^* \quad (4.31)$$

et dans ce cas,  $\mathbb{W}$  devient :

$$\mathbb{W} = \mathbb{P} \begin{pmatrix} e^{+i(\theta_1/2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\theta_1/2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+i(\theta_2/2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i(\theta_2/2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{P}^* \quad (4.32)$$

Ainsi,  $\mathbb{W}$  représente une rotation autour de la même ligne principale que  $\mathbb{Q}$ , mais d'un angle deux fois plus petit. L'idée est donc d'adapter la construction des paramètres de Rodrigues classiques à  $\mathbb{W}$  de manière à doubler ainsi le domaine de description d'une rotation principale pour  $\mathbb{Q}$ . On introduit une nouvelle matrice  $\mathbb{S}$  antisymétrique définie par la relation de Cayley par rapport à  $\mathbb{W}$  :

$$\mathbb{W} = (\mathbb{I} - \mathbb{S})(\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{S})^{-1}(\mathbb{I} - \mathbb{S}) \quad (4.33)$$



$$\text{et } \mathbb{S} = (\mathbb{I} - \mathbb{W})(\mathbb{I} + \mathbb{W})^{-1} = (\mathbb{I} + \mathbb{W})^{-1}(\mathbb{I} - \mathbb{W}) \quad (4.34)$$

De la même manière que précédemment, nous pouvons définir une équation différentielle simple sur  $\mathbb{S}$  en fonction de l'équation différentielle sur  $\mathbb{W}$  :

$$\dot{\mathbb{W}} = -\tilde{\Omega}\mathbb{W} \quad (4.35)$$

et

$$\dot{\mathbb{S}} = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbb{S})\tilde{\Omega}(\mathbb{I} - \mathbb{S}) \quad (4.36)$$

On peut alors relier  $\tilde{\Omega}$  et  $\Omega'$  en réécrivant (4.25) :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega'\mathbb{Q} \quad (4.37)$$

$$\dot{\mathbb{W}}\mathbb{W} + \mathbb{W}\dot{\mathbb{W}} = -\Omega'\mathbb{W}\mathbb{W} \quad (4.38)$$

$$-\tilde{\Omega}\mathbb{W}\mathbb{W} - \mathbb{W}\tilde{\Omega}\mathbb{W} = -\Omega'\mathbb{W}\mathbb{W} \quad (4.39)$$

$$\Omega' = \tilde{\Omega} + \mathbb{W}\tilde{\Omega}\mathbb{W}^T \quad (4.40)$$

L'inconvénient est que l'on souhaite plutôt calculer  $\tilde{\Omega}$  en fonction de  $\Omega'$ , la vitesse angulaire du repère mobile. Pour cela, écrivons que  $\mathbb{W}\tilde{\Omega}\mathbb{W}^T$  est une application linéaire de  $\tilde{\Omega}$  :

$$W_{ik}\tilde{\Omega}_{kl}W_{jl} = A_{ijkl}\tilde{\Omega}_{kl} \quad (4.41)$$

Ainsi, l'équation (4.40) devient :

$$\Omega'_{ij} = (I_{ijkl} + A_{ijkl})\tilde{\Omega}_{kl} \quad (4.42)$$

et donc :

$$\tilde{\Omega}_{ij} = (I_{ijkl} + A_{ijkl})^{-1}\Omega'_{kl} \quad (4.43)$$

avec  $A_{ijkl} = W_{ik}W_{jl}$ .

Plutôt que de traiter l'inversion d'une matrice de dimension 5 mais d'ordre 4, nous nous ramenons à l'inversion d'une matrice de dimension 10 mais d'ordre 2 grâce à la notation "chapeau". Nous décomposons chaque matrice d'ordre 2 sur les 10 vecteurs d'une base des matrices antisymétriques de dimension 5 :

$$\tilde{\Omega}_{kl} = \sum_{i=1}^{10} \left( \tilde{\Omega}_{mn} e_{mn}^{(i)} \right) e_{kl}^{(i)} = \sum_{i=1}^{10} \hat{\tilde{\Omega}}_i e_{kl}^{(i)} \quad (4.44)$$

avec :

$$\begin{aligned} (e_{kl}^{(1)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(2)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(3)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(4)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(5)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (e_{kl}^{(6)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(7)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(8)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, (e_{kl}^{(9)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } (e_{kl}^{(10)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'équation (4.41) s'écrit alors :

$$\sum_{i=1}^{10} \left( \sum_{q=1}^{10} \hat{A}_{iq} \hat{\Omega}_q \right) e_{kl}^{(i)} = \sum_{i=1}^{10} \hat{\Omega}_i \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} \quad (4.45)$$

$$\sum_{q=1}^{10} \hat{\Omega}_q \left( \sum_{i=1}^{10} \hat{A}_{iq} e_{kl}^{(i)} \right) = \sum_{i=1}^{10} \hat{\Omega}_i \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} \quad (4.46)$$

$$\sum_{i=1}^{10} \hat{\Omega}_i \left( \sum_{q=1}^{10} \hat{A}_{qi} e_{kl}^{(q)} \right) = \sum_{i=1}^{10} \hat{\Omega}_i \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} \quad (4.47)$$

Cette égalité est vraie  $\forall \hat{\Omega}$ , d'où :

$$\sum_{q=1}^{10} \hat{A}_{qi} e_{kl}^{(q)} = \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} \quad (4.48)$$

De plus, la base  $e_{kl}^{(j)}$  est une base orthonormée, c'est-à-dire que l'on a :

$$e_{kl}^{(q)} \cdot e_{kl}^{(j)} = 0 \text{ si } q \neq j \quad \text{et} \quad e_{kl}^{(j)} \cdot e_{kl}^{(j)} = 1$$

Donc,

$$\hat{A}_{ji} = \sum_{m=1}^{10} \sum_{n=1}^{10} W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} e_{kl}^{(j)} \quad (4.49)$$

ou en convention d'Einstein :

$$\boxed{\hat{A}_{ji} = W_{km} e_{mn}^{(i)} W_{ln} e_{kl}^{(j)}} \quad (4.50)$$

Une fois que nous avons  $\hat{\mathbb{A}}$ , nous pouvons y ajouter l'identité avant d'inverser la matrice ainsi obtenue :

$$\hat{B}_{ij} = (\hat{I}_{ij} + \hat{A}_{ij})^{-1} \quad (4.51)$$

On obtient alors :

$$\hat{\tilde{\Omega}}_i = \hat{B}_{ij} \hat{\Omega}'_j \quad (4.52)$$

et enfin :

$$\tilde{\Omega}_{ij} = \sum_{k=1}^{10} \hat{\tilde{\Omega}}_k e_{ij}^{(k)} \quad (4.53)$$

Toute cette procédure engendre évidemment un coût de calcul non négligeable, et il serait intéressant de rechercher d'autres méthodes d'intégration moins coûteuses pour la loi d'évolution de la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$ .

### 4.2.2.3 Extension illimitée du domaine de description d'une rotation principale grâce aux paramètres de Rodrigues modifiés associés

Pouvoir décrire une rotation de  $\pm 360^\circ$  est parfois insuffisant. Par exemple, lors d'un trajet circulaire cyclique, le repère mobile tourne en suivant le point de chargement et fera donc autant de tours qu'il y a de cycles. Pour résoudre cette difficulté, nous allons utiliser le fait que les paramètres de Rodrigues modifiés ne sont pas uniques. Il existe en effet plusieurs jeux de paramètres capables de rendre compte d'une même rotation, et ces jeux ne sont pas singuliers pour les mêmes valeurs de rotation principale. Le choix du jeu de paramètres intervient lorsque nous calculons la matrice  $\mathbb{W}$  racine carrée de  $\mathbb{Q}$ . En effet, il existe plusieurs matrices  $\mathbb{W}$  telles que :

$$\mathbb{W}\mathbb{W} = \mathbb{Q} \quad (4.54)$$

selon que l'on choisisse pour  $\mathbb{W}$  des couples de valeurs propres complexes à partie réelle positive ou négative. D'un point de vue pratique, nous ne calculons  $\mathbb{W}$  qu'une seule fois à partir de  $\mathbb{Q}$  (par exemple dans la position initiale, ce qui est trivial étant donné que  $\mathbb{W} = \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ ). Ensuite, nous calculons  $\mathbb{S}$  grâce à l'équation (4.34), et l'intégration de sa loi d'évolution modifie alors  $\mathbb{W}$  puis  $\mathbb{Q}$  au cours du chargement, par l'intermédiaire des équations (4.33) et (4.54) respectivement. Par cette méthode,  $\mathbb{W}$  peut avoir des valeurs propres qui tendent vers  $-1$ , ce qui met un terme au calcul<sup>2</sup>. Dans ce cas de figure, nous recalculons alors  $\mathbb{W}$  directement à partir de (4.54) en prenant des valeurs propres à partie réelle positive. Les anciennes valeurs propres proches de  $-1$  deviennent cette fois-ci proches de  $1$ . Il ne reste plus qu'à reconstruire une nouvelle matrice  $\mathbb{S}$  et à intégrer de nouveau son équation différentielle en fonction du chargement.

Nous n'avons alors plus de limitation sur le domaine angulaire que peut parcourir le repère mobile, ce qui nous permet de décrire n'importe quel type de chargement cyclique sans rencontrer de problème de singularité.

### 4.2.3 Choix du deuxième vecteur utilisé pour construire le tenseur taux de rotation

Nous rappelons l'équation d'évolution pour la rotation du repère mobile :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega' \mathbb{Q} \quad (4.55)$$

avec

$$\Omega' = -\mathbb{Q}\Omega\mathbb{Q}^T = -\mathbb{Q} \left( C_\phi \left[ \hat{\omega}_1 \otimes \underline{m}_{(2)} - \underline{m}_{(2)} \otimes \hat{\omega}_1 \right] \dot{p} \right) \mathbb{Q}^T \quad (4.56)$$

Le vecteur  $\underline{m}_{(2)}$  doit être colinéaire à  $\hat{\omega}_1$  lors de trajets uniaxiaux et non-colinéaire pour des trajets non-proportionnels, de manière à ce que l'axe  $\hat{\omega}_1$  du repère mobile le suive

---

2. exactement comme dans le cas des paramètres de Rodrigues classiques.

et fasse ainsi tourner la direction de la distorsion. Parmi les candidats qui répondent à ce cahier des charges, on trouve :

$$\underline{S} - \underline{X}, \underline{\dot{S}}, \underline{\dot{\epsilon}}^P, \underline{\dot{\epsilon}}^P, \underline{X}, \underline{\dot{X}}$$

Nous abandonnons le vecteur  $\underline{X}$  qui conduirait à une écriture du modèle trop restrictive et en tout état de cause incapable de rendre compte des résultats de rochet 2D classiques. En effet, nous retrouverions l'hypothèse de direction de la distorsion colinéaire à la direction de l'érouissage cinématique, hypothèse retenue dans certains modèles ([Rousset 85], [François 01], ...) mais invalidée par nos tests de rochet 2D (voir chapitre 3). De même, le vecteur  $\underline{\dot{\epsilon}}^P$  n'est à l'évidence pas un bon candidat lorsque l'on s'intéresse à des trajets de rochet multiaxial<sup>3</sup>.

Nous éliminons aussi le vecteur  $\underline{\dot{S}}$  qui peut conduire à des rotations du repère mobile trop violentes. Par exemple, si l'on imagine un trajet en escalier dans l'espace des contraintes, la rotation de 90° du repère mobile à chaque marche du trajet pourrait provoquer des erreurs de comportement comme celle reportée sur la figure 3.31.

Enfin, le vecteur  $\underline{\dot{X}}$  est lui aussi mis de côté pour le moment. Il n'y a a priori aucune raison à cela si ce n'est la volonté de raisonner sur des grandeurs plus directement liées au point de chargement comme  $\underline{\dot{\epsilon}}^P$  et  $\underline{S} - \underline{X}$ .

Le choix entre ces deux derniers vecteurs n'est *a priori* pas évident. Le vecteur  $\underline{S} - \underline{X}$  conduit à un comportement proche du modèle à distorsion développé dans le cas de chargements biaxiaux. Nous proposons alors la loi d'évolution suivante pour l'angle  $\phi$  qui gère la rotation du repère mobile :

$$\dot{\phi} = C_\phi \operatorname{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right) \left| \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right|^{m_\phi} \dot{p} \quad (4.57)$$

ce qui induit une rotation du repère mobile jusqu'à ce que l'axe  $\underline{\hat{\omega}}_1$  soit suffisamment proche du point de chargement, de coordonnées  $(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$  dans le repère mobile. Néanmoins,  $\underline{\dot{\epsilon}}^P$  est aussi un bon candidat pour le modèle 2D et l'on aurait pu par exemple proposer la loi d'évolution suivante :

$$\dot{\phi} = C_\phi \operatorname{sign}(\underline{\hat{\omega}}_1 \wedge \underline{\dot{\epsilon}}^P) \|\underline{\hat{\omega}}_1 \wedge \underline{\dot{\epsilon}}^P\|^{m_\phi} \dot{p} \quad (4.58)$$

qui engendre une rotation du repère mobile jusqu'à ce que l'axe  $\underline{\hat{\omega}}_1$  soit suffisamment parallèle au taux de déformation plastique.

Afin de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle 2D, nous avons choisi de retenir pour  $\underline{m}_{(2)}$  le vecteur  $\underline{S} - \underline{X}$ . Le taux de rotation  $\Omega$  s'écrit alors :

$$\Omega = C_\phi (1 - |\underline{\hat{\omega}}_1 \cdot \underline{S}_u|)^{m_\phi} [\underline{\hat{\omega}}_1 \otimes \underline{S}_u - \underline{S}_u \otimes \underline{\hat{\omega}}_1] \dot{p} \quad (4.59)$$

avec

$$\underline{S}_u = \frac{\underline{S} - \underline{X}}{\|\underline{S} - \underline{X}\|} \quad (4.60)$$

3. Le repère mobile s'orienterait en effet dans la direction de la déformation progressive sans que le chargement en contrainte n'ait pour autant changé de direction.

Le coefficient dépendant du matériau  $m_\phi$  est introduit pour les mêmes raisons que dans le modèle 2D, à savoir permettre que la rotation du repère mobile s'arrête avant que l'axe  $\hat{\omega}_1$  ne soit sur le point de chargement.

Les résultats de simulation obtenus en choisissant plutôt  $\underline{m}_{(2)} = \underline{\dot{\epsilon}}^p$  sont reportés dans l'annexe (B).

### 4.3 Identification du modèle 5D sur les essais biaxiaux réalisés sur un acier inoxydable COTHAA, de type 316L

L'ensemble des équations du modèle à distorsion, dans sa version complète valable pour des trajets dans tout l'espace des déviateurs, est reporté dans le tableau 4.1. Puisque seule la loi d'évolution de la rotation du repère mobile a changé par rapport à la version 2D du modèle à distorsion, il n'y a pas lieu de réidentifier la version 5D sur les essais uniaxiaux. Les résultats d'identification sur trajets uniaxiaux sont donc ceux proposés avec le modèle 2D et présentés dans la partie (3.3.5). Seule la nouvelle loi de rotation du repère mobile est identifiée sur les essais multiaxiaux réalisés avec l'acier inoxydable de type 316L. Les résultats d'identification sont reportés sur les figures 4.2 et 4.3 et les valeurs des coefficients réidentifiés sont reportées dans le tableau 4.2.

On remarque que ces résultats sont quantitativement comparables à ceux obtenus avec la version 2D du modèle à distorsion. L'essai "papillon" de validation reportée sur la figure 4.4 est lui aussi satisfaisant.

Nous pouvons donc conclure que la nouvelle loi d'évolution (4.59), valable pour des chargements de dimension supérieure à deux, nous permet de retrouver les mêmes résultats que ceux obtenus avec la loi scalaire écrite pour des chargements uniquement biaxiaux.

### 4.4 Identification de la version 5D du modèle à distorsion sur des essais de dimension supérieure à deux [Vincent *et al.* 02b], [Vincent et Calloch 02]

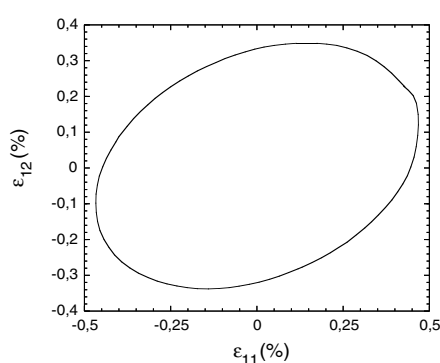
Après avoir validé la loi de rotation sur des trajets de dimension 2, il nous reste maintenant à tester cette loi pour des chargements de dimension supérieure. Nous nous appuyons pour cela sur les résultats d'essais obtenus d'une part par Gaudin et Feaugas [Gaudin et Feaugas 99] sous trajet uniaxial, et d'autre part par Bocher *et al.* [Bocher *et al.* 01] en pression interne/traction-compression/torsion sur l'acier inoxydable de type 316L présenté dans le premier chapitre. Pour tester la qualité du modèle à distorsion, nous identifions également un modèle macroscopique phénoménologique réputé : le modèle d'Ohno-Wang [Ohno et Wang 93], présenté dans le premier chapitre.

Surface seuil	$F = \hat{S}_1^2 - 2\hat{S}_1 t_1 (d_{(1)k} t_k) - t_1^2 (R_{(1)}^2 - d_{(i)k} d_{(i)k}) = 0$ <p>avec <math>t_k = \frac{\hat{S}_k}{R_{(k)}}</math> et <math>t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - t_k t_k}</math></p>
Écrouissage isotrope	$\dot{R}_{(1)} = b (R_{1\infty} - R_{(1)}) \dot{p} \quad \text{et} \quad \dot{R}_{(k)} = (1 + \delta) \dot{R}_{(1)}$ <p>avec <math>R_{1\infty} = A [q_N(q) - q_P(q)] + q_P(q) + S_0</math></p> <p>où <math>\begin{cases} q_N(q) = a_N q \\ q_P(q) = a_P q \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dot{Y}_i = r_y (\epsilon_i^p - Y_i) \dot{p} \\ q = \ \epsilon^p - Y\  \end{cases}</math></p> <p>et où <math>A = \sqrt{\frac{C_{ij} C_{ij} - u_k C_{kl} C_{lm} u_m}{C_{ij} C_{ij}}}</math></p> <p>avec <math>\dot{C}_{ij} = C_c [u_i u_j - C_{ij}] \dot{p} \quad \text{et} \quad u_i = \epsilon_i^p / \ \epsilon^p\ </math></p>
Écrouissage cinématique	$\begin{cases} \dot{d}_{(1)1} = C_{(1)1} \left( \dot{\epsilon}_1^p - \left( \frac{\gamma_{(1)1} \Phi_{(1)1}(p)  d_{(1)1} }{R_{(1)}} \right)^{m_{(1)1}+1} \frac{d_{(1)1}}{ d_{(1)1} } \dot{p} \right) \\ \dot{d}_{(1)k} = C_{(1)2} \left( \dot{\epsilon}_k^p - \left( \frac{ d_{(1)k} }{d_{(1)kmax}} \right)^{m_{(1)2}+1} \frac{d_{(1)k}}{ d_{(1)k} } \dot{p} \right) \end{cases}$ <p>avec <math>d_{(1)kmax} = \frac{R_{(k)}}{\gamma_{(1)2}} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2 - \left( \frac{\gamma_{(1)2} d_{(1)j}}{R_{(j)}} \right)^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} j \neq 1 \\ j \neq k \end{cases}</math></p> $\dot{X}_{(n)i} = C_{(n)} \left( \dot{\epsilon}_i^p - \left( \gamma_{(n)} \Phi_{(n)}(p) \ \underline{X}_{(n)}\  \right)^{m_{(n)}+1} \frac{X_{(n)i}}{\ \underline{X}_{(n)}\ } \dot{p} \right) \quad n = 2, 3$
Rotation du système de coordonnées mobile	$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega' \mathbb{Q}$ <p>avec <math>\Omega' = -\mathbb{Q} (C_\phi (1 -  \hat{\omega}_1 \cdot \underline{S}_u )^{m_\phi} [\hat{\omega}_1 \otimes \underline{S}_u - \underline{S}_u \otimes \hat{\omega}_1] \dot{p}) \mathbb{Q}^T</math></p> <p>où <math>\underline{S}_u = \frac{\underline{S} - \underline{X}}{\ \underline{S} - \underline{X}\ }</math></p>

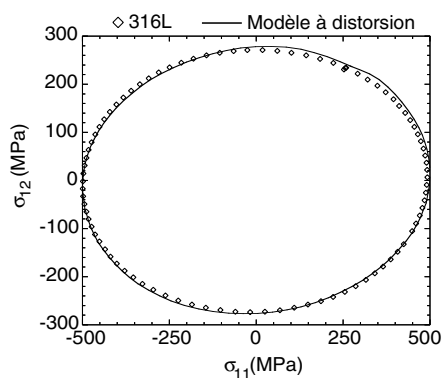
TAB. 4.1 – Résumé des équations de la version 5D du modèle à distorsion appelée “Distor5D”

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$C_\phi$	20180	$m_\phi$	2,89

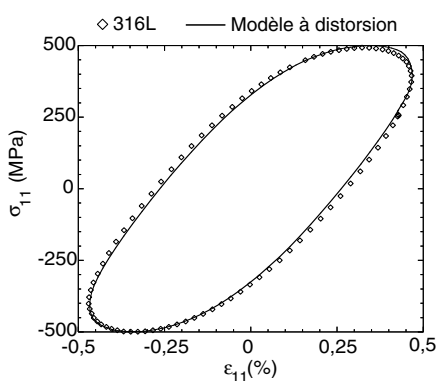
TAB. 4.2 – Coefficients de la nouvelle loi de rotation du repère mobile, pour la version 5D du modèle à distorsion



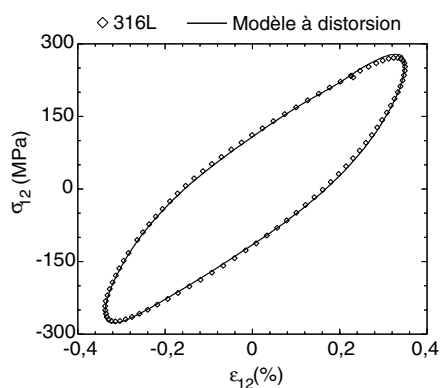
(a) Trajet de chargement



(b) Réponse en contrainte-contrainte



(c) Réponse dans la direction axiale



(d) Réponse dans la direction de cisaillement

FIG. 4.2 – Identification du modèle 5D sur l'essai de surécrouissage réalisé sur l'acier inoxydable COTHAA de type 316L

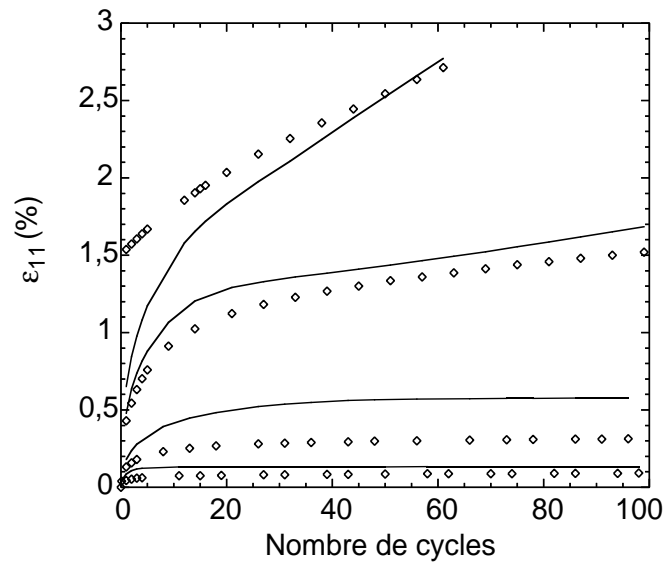


FIG. 4.3 – Identification du modèle 5D sur les essais de rochet 2D réalisés sur l'acier inoxydable COTHAA de type 316L

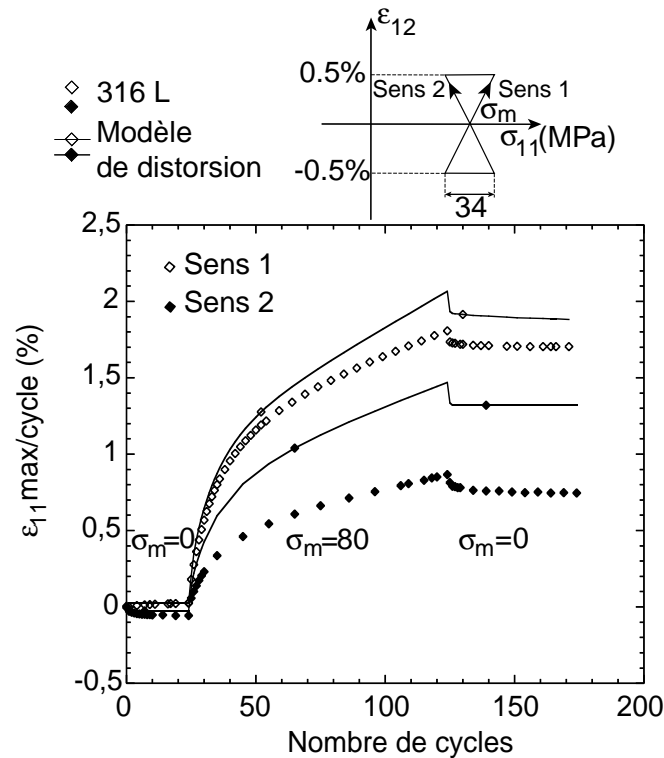


FIG. 4.4 – Validation de la version 5D du modèle à distorsion sur un essai papillon



Nous prenons le même nombre de variables cinématiques dans les deux modèles, et le phénomène de surécrouissage est pris en compte de la même manière que dans le modèle 2D (voir paragraphe 3.3.5.2). La numérotation des axes de chargement correspond à celle reportée sur la figure 4.5.

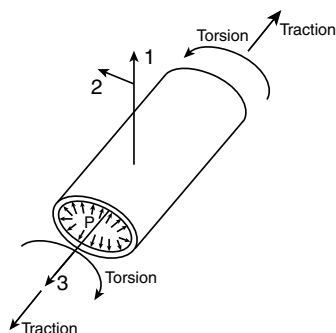


FIG. 4.5 – Numérotation des axes de chargement

Les coefficients dépendant du matériau retenus pour les deux modèles phénoménologiques sont reportés dans les tableaux 4.3 et 4.4.

Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$S_0$	170 MPa
$b$	9	$a_p$	976	$a_n$	70290
$C_c$	2	$r_Y$	36	$\delta$	0
$C_{(1)1}$	60000 MPa	$\gamma_{(1)1}$	4,21	$m_{(1)1}$	2,8
$C_2$	13000 MPa	$\gamma_2$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$m_2$	2,8
$C_3$	900 MPa	$\gamma_3$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$m_3$	2,8
$C_{(1)2}$	$= C_{(1)1}$	$\gamma_{(1)2}$	2,29	$m_{(1)2}$	14,9
$\Phi_{(1)1\infty}$	0,667	$\Phi_{2\infty}$	0,35	$\Phi_{3\infty}$	1
$\omega$	9	$C_\phi$	41700	$m_\phi$	2,31
$n$	24	$K$	$10 \text{ MPa} \cdot \text{s}^{1/n}$		

TAB. 4.3 – Coefficients du modèle à distorsion identifiés sur les essais de dimension supérieure à 2 réalisés sur un acier inoxydable de type 316L

Les résultats d'identification sont présentés sur les figures 4.6 à 4.8. Sur chaque figure, le modèle à distorsion (D) est tracé en trait continu, le modèle d'Ohno et Wang (OW) en traits discontinus, et l'expérience (E) est représentée par des symboles.

Les résultats d'écrouissage uniaxial, monotone ou cyclique, des deux modèles donnent des résultats très proches les uns des autres. En fait, un seul modèle a été identifié et les valeurs des coefficients  $S_0, C_1, C_2, C_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Phi_{1\infty}, \Phi_{2\infty}, \Phi_{3\infty}, b, a_p$  et  $r_y$  ont ensuite été introduites dans le second modèle. Les quelques différences entre les deux modèles viennent essentiellement des coefficients  $m_i$  qui gèrent la déformation progressive. Dans le modèle à distorsion, nous avons pu identifier ces derniers coefficients en

Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur	Paramètres	Valeur
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$S_0$	170 MPa
$b$	9	$a_p$	976	$a_n$	70000
$C_c$	2	$r_Y$	36	$\omega$	9
$C_1$	60000 MPa	$\gamma_1$	$2,47 \cdot 10^{-2}$	$m_1$	0
$C_2$	13000 MPa	$\gamma_2$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$m_2$	3,43
$C_3$	900 MPa	$\gamma_3$	$4,5 \cdot 10^{-3}$	$m_3$	1,43
$\phi_{1\infty}$	0,667	$\phi_{2\infty}$	0,35	$\phi_{3\infty}$	1
$n$	24	$K$	$10 \text{ MPa.s}^{1/n}$		

TAB. 4.4 – Coefficients du modèle d'Ohno et Wang identifiés sur les essais de dimension supérieure à 2 réalisés sur un acier inoxydable de type 316L

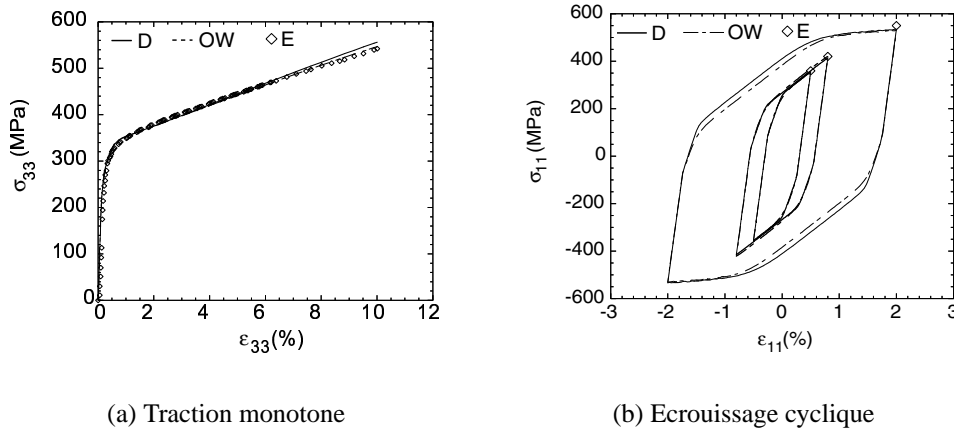


FIG. 4.6 – Identification des deux modèles phénoménologiques sur un essai de traction monotone et sur des essais d'écrouissage cyclique réalisés sur un acier inoxydable de type 316L

n'utilisant que les essais uniaxiaux. On obtient d'ailleurs de bons résultats en n'utilisant qu'un seul paramètre  $m$  identique pour tous les écrouissages cinématiques. En revanche, nous ne pouvons pas procéder ainsi avec le modèle d'Ohno et Wang puisque le choix des coefficients  $m_i$  a une incidence directe sur tous les essais de déformation progressive, uniaxiaux comme multiaxiaux. Dans ce cas, nous identifions ces coefficients en utilisant tous les essais de rochet. Les résultats sont évidemment moins bons que ceux obtenus avec le modèle à distorsion (dans la mesure où il n'intègre pas de paramètre pour distinguer les essais uniaxiaux des essais non-proportionnels, le modèle d'Ohno-Wang s'identifie en faisant un compromis entre les simulations de ces deux types d'essais). Le modèle d'Ohno et Wang sous-estime légèrement le rochet uniaxial (Fig. 4.7) et surestime le rochet multiaxial (Fig. 4.8). Le modèle à distorsion, quant à lui, donne des résultats satisfaisants sur ces deux types d'essais.

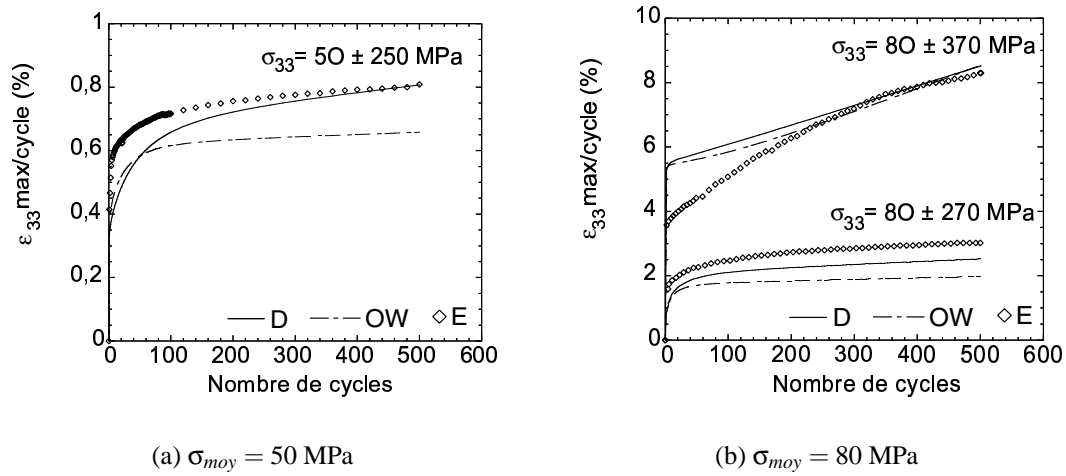


FIG. 4.7 – Identification des deux modèles phénoménologiques sur des essais de rochet uniaxial réalisés sur un acier inoxydable de type 316L

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'introduction de la distorsion modifie la forme des boucles d'hystérésis pour les deux essais de surécrouissage. On peut noter un effet bénéfique sur la figure 4.10(d).

On note à ce stade que le modèle à distorsion décrit mieux les résultats expérimentaux que le modèle d'Ohno et Wang. Bien sûr, le nombre de paramètres dépendant du matériau, le nombre de variables internes ainsi que le temps de calcul ne sont pas non plus identiques pour les deux modèles. Sur certaines simulations, on remarque ainsi que le temps de calcul est d'un ordre de grandeur plus long avec le modèle à distorsion qu'avec le modèle d'Ohno et Wang. Cet écart de temps de calcul provient d'une part du cadre viscoplastique qui impose la recherche numérique du point le plus proche pour le modèle à distorsion (voir paragraphe 3.3.3) mais aussi et surtout de l'intégration de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile qui comprend notamment 2 inversions de matrice par pas de temps (voir paragraphe 4.2.2). Nous ne nous sommes pas focalisés sur ce problème et il existe peut-être des méthodes plus astucieuses permettant de diminuer le temps de calcul.

Pour valider ces deux modèles nous utilisons trois essais de rochet 3D. Le premier comporte deux étapes : premièrement, une contrainte moyenne constante  $\sigma_{\theta\theta} = 50 \text{ MPa}$  et une déformation de cisaillement cyclique  $\varepsilon_{23} = \pm 0.3\%$  ; ensuite la même contrainte primaire accompagnée cette fois d'un chargement cyclique en déformation axiale et de cisaillement  $\varepsilon_{23} = \pm 0.3\%$  et  $\varepsilon_{33} = \pm 0.35\%$  (Fig. 4.11(a)). Le deuxième essai de validation est à contrainte primaire constante  $\sigma_{\theta\theta} = 50 \text{ MPa}$  avec un trajet papillon en déformation axiale et de cisaillement pour le chargement secondaire  $\varepsilon_{23} = \pm 0.35\%$  et  $\varepsilon_{33} = \pm 0.4\%$  (Fig. 4.11(b)). Enfin, le troisième essai est à contrainte primaire constante  $\sigma_{\theta\theta} = 50 \text{ MPa}$  avec un trajet circulaire dans le plan ( $\varepsilon_{33}$ ;  $2/\sqrt{3} \varepsilon_{23}$ ) de rayon  $0.4\%$  (Fig. 4.12).

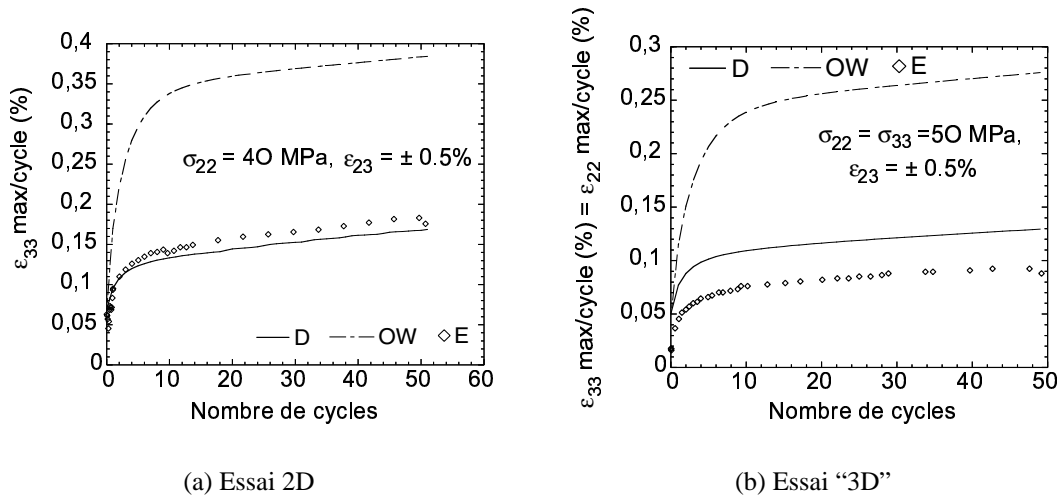


FIG. 4.8 – Identification des deux modèles phénoménologiques sur des essais de rochet multiaxial réalisés sur un acier inoxydable de type 316L

On peut remarquer que le modèle d'Ohno et Wang décrit plutôt mieux le premier essai de validation que le modèle à distorsion. En fait, les deux modèles semblent sous-estimer la seconde partie du chargement ; la réussite du modèle d'Ohno et Wang vient sans doute du fait qu'il surestime la première partie du chargement. Concernant le deuxième essai de validation, le modèle à distorsion est en accord avec les résultats expérimentaux, alors que le modèle d'Ohno et Wang les sous-estime (comme pour les essais de rochet uniaxial), ce qui est plutôt surprenant compte tenu du trajet de chargement. Nous avons vérifié qualitativement ce point en remarquant que les résultats des simulations faites avec le modèle à distorsion étaient plus sensibles à une variation des exposants  $m_i$  (jouant surtout sur le rochet uniaxial) qu'à une variation des coefficients  $C_\phi, m_\phi$  qui n'interviennent que pour des trajets multiaxiaux. Le dernier essai de validation confirme cette tendance dans la mesure où les deux modèles macroscopiques sous-estiment le niveau de rochet, alors que le niveau de contrainte équivalente maximale est relativement bien décrit (Fig. 4.12(b)). Le modèle à distorsion donne toutefois de meilleurs résultats que le modèle d'Ohno et Wang. Pour remédier à ce type de problème, Delobelle *et al.* [Delobelle *et al.* 95] proposent un modèle dans lequel la direction du terme de rappel des écrouissements cinématiques dépend de la non-proportionnalité du chargement. Plus le trajet est non-proportionnel et plus la direction de rappel se rapproche de  $\underline{X}$ , comme dans la modélisation classique de l'écrouissage cinématique proposée par Armstrong et Frederick [Armstrong et Frederick 66], ce qui génère plus de rochet. A l'inverse, si le trajet est "peu" non-proportionnel, Delobelle *et al.* limitent l'ampleur du rochet en choisissant un retour quasi-radial [Burlet et Cailletaud 87]. Cette méthode pourrait être un moyen d'améliorer la capacité prédictive du modèle.

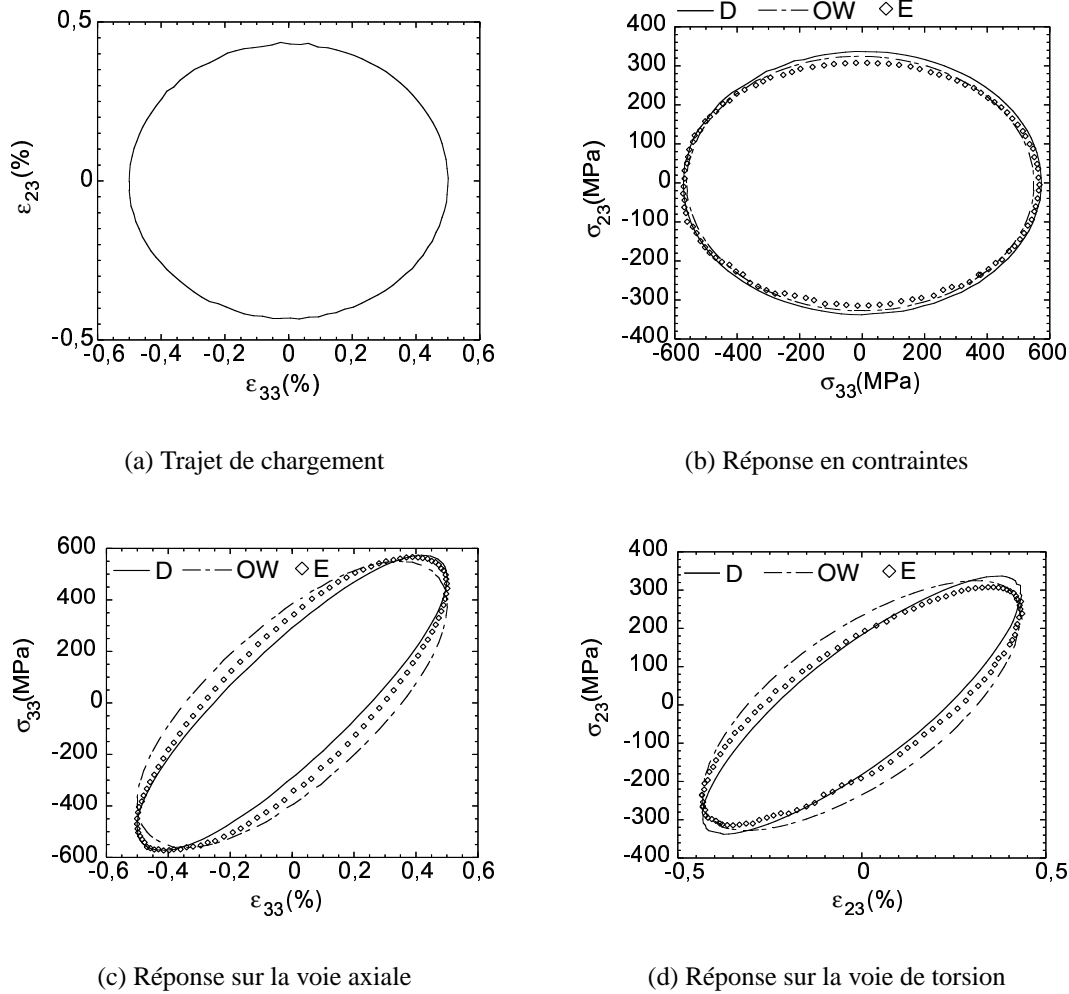


FIG. 4.9 – Identification des deux modèles phénoménologiques sur l'essai de sur-écrouissage n°1 réalisé sur un acier inoxydable de type 316L

## 4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les modifications qu'il est nécessaire d'apporter au modèle à distorsion pour qu'il puisse décrire des trajets de chargements de dimension supérieure à deux. Une nouvelle loi de rotation du repère mobile a été proposée ainsi qu'une méthode pour intégrer cette équation d'évolution. Cette équation nous permet de retrouver les résultats d'identification obtenus avec la version 2D du modèle à distorsion, mais aussi de valider le modèle sur des essais plus complexes, de dimension supérieure à 2 [Bocher *et al.* 01]. Un modèle de référence [Ohno et Wang 93] a lui aussi été identifié sur ces derniers essais mais avec moins de succès.

Le modèle à distorsion est capable de représenter convenablement l'écrouissage mo-

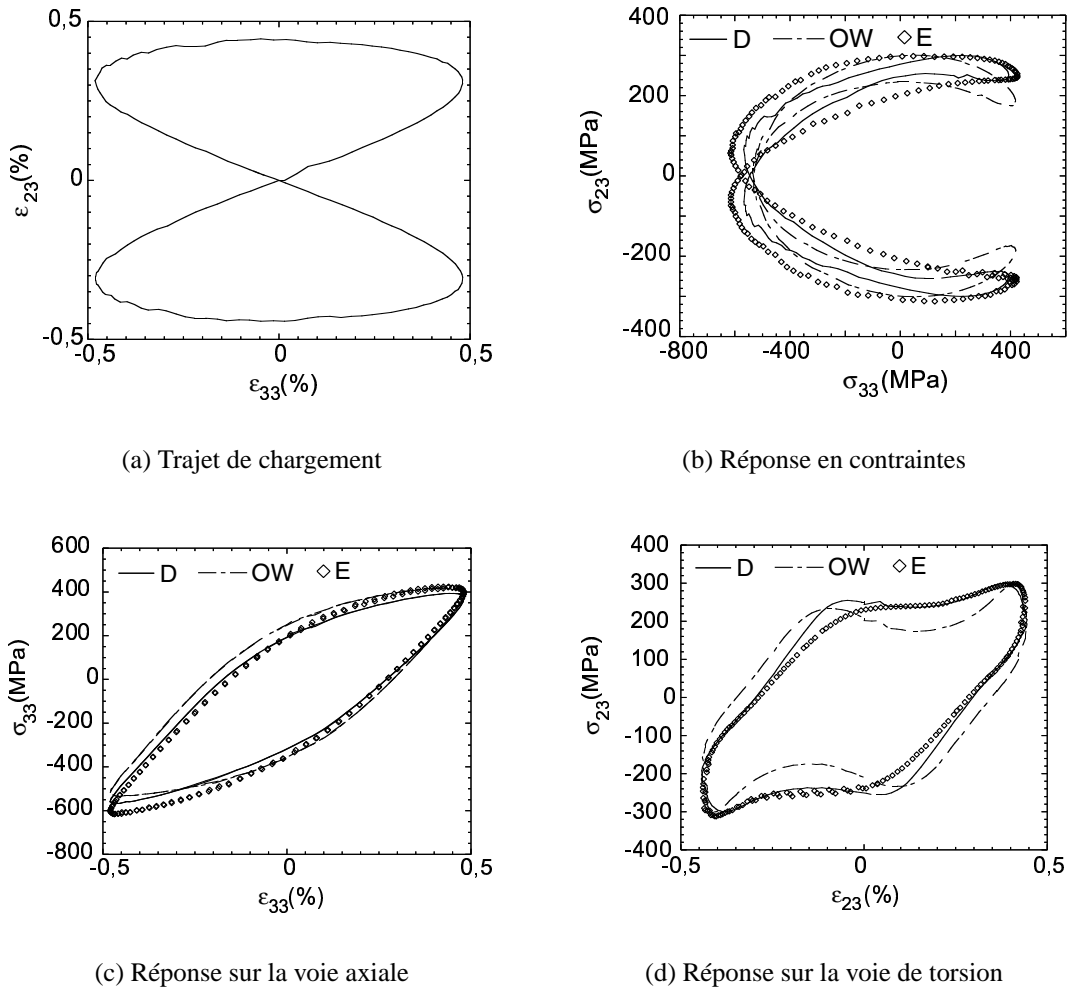
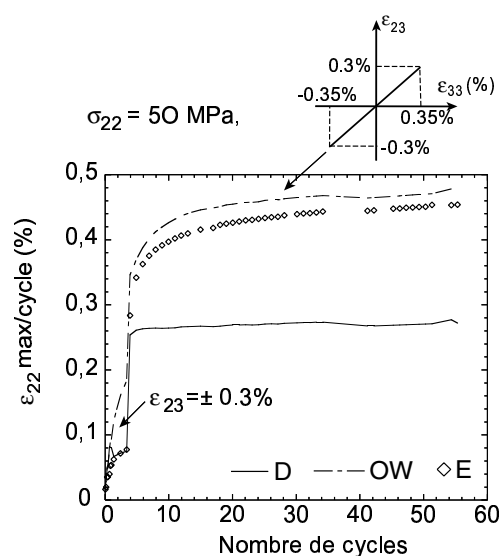


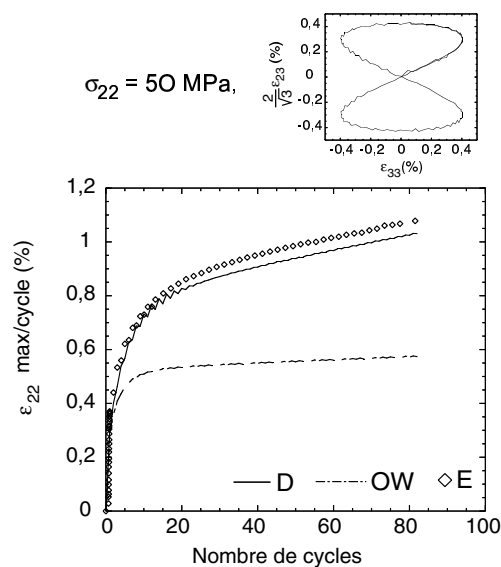
FIG. 4.10 – Identification des deux modèles phénoménologiques sur l'essai de sur-écrouissage n°2 réalisé sur un acier inoxydable de type 316L

notone et cyclique ainsi que le phénomène de déformation progressive, sous trajets uniaxiaux et multiaxiaux non-proportionnels.

La dernière étape de validation du modèle concerne la prévision de champs de déformation et de contrainte non homogènes, dans un problème de structure où l'on rencontre le phénomène de rochet multiaxial. À cet effet, un essai de rochet de contact a été mis au point au laboratoire. Il fait l'objet du prochain chapitre. Il reste à implanter le modèle à distorsion dans un code de calcul aux éléments finis pour pouvoir simuler un tel essai.

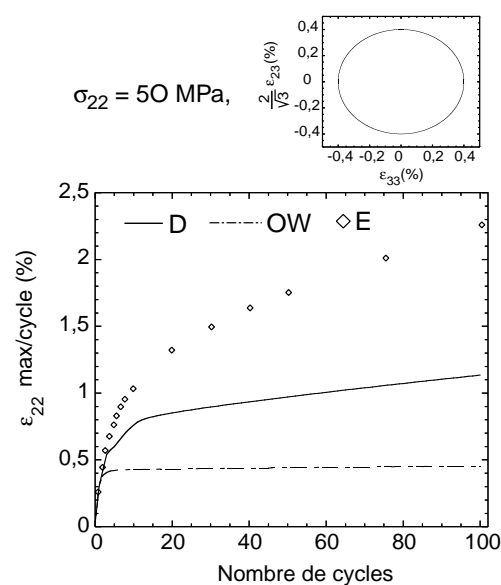


(a) Rochet multiaxial en deux étapes successives

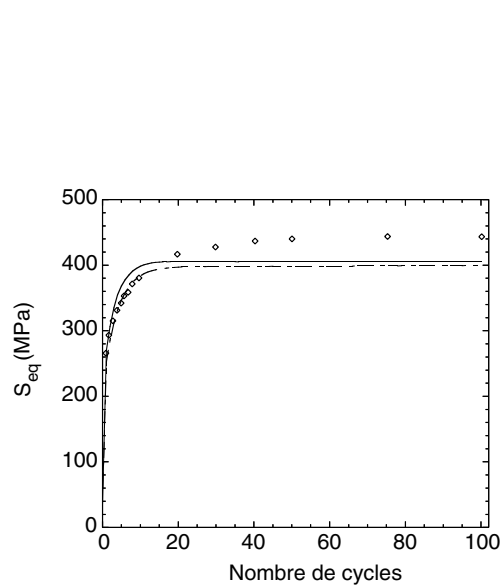


(b) Rochet multiaxial avec un trajet papillon pour le chargement secondaire

FIG. 4.11 – Essais de validation n°1 et 2



(a) Rochet multiaxial avec un trajet circulaire pour le chargement secondaire



(b) Niveau de contrainte (déviatorique) équivalente maximum au cours des cycles

FIG. 4.12 – Essai de validation n°3





# Chapitre 5

## Vers un essai de structure de type rochet de contact

### Sommaire

---

5.1	Introduction . . . . .	166
5.2	Présentation des moyens d'essais . . . . .	167
5.3	Principe de l'essai de rochet de contact . . . . .	168
5.4	Précautions particulières . . . . .	171
5.5	Premiers résultats et perspectives . . . . .	171

---

## 5.1 Introduction

Dans de nombreuses applications industrielles où un chargement thermo-mécanique répété intervient, un phénomène de déformation progressive est susceptible de se produire, ce qui peut nuire aux capacités fonctionnelles de la structure en modifiant par exemple sa forme. Toutefois, le plus souvent le matériau rompt par fatigue avant qu'une déformation plastique ne se soit suffisamment accumulée dans une direction pour provoquer la rupture par allongement (comme lors d'un essai de traction monotone par exemple). Cependant, dans les problèmes de contact roulant (par exemple sur les voies de chemin de fer), la forte contrainte hydrostatique présente sous la zone de contact retarde l'initiation de fissures et la déformation progressive peut alors devenir extrêmement élevée après de nombreux cycles [Bower et Johnson 89]. Cela explique les grandes déformations qui apparaissent sur les rails là où le train "glisse" le plus (virages notamment).

De nombreux papiers ont été dédiés à ce problème, tant d'un point de vue expérimental que théorique [Bhargava *et al.* 85], [Bower 89], [Bower et Johnson 89], [Kapoor 94], [Ringsberg 00], [Ringsberg *et al.* 00], [Fletcher et Beynon 00], [Ambrico et Begley 00]. Récemment, des simulations de chargements de contact glissant ont été réalisées avec différents modèles pour représenter le phénomène de rochet et la formation de fissures par fatigue à faible nombre de cycles [Ringsberg 00]. La durée de vie était estimée par deux approches - allongement jusqu'à rupture d'une part et rupture par fatigue d'autre part - et le mécanisme conduisant au plus faible nombre de cycles à rupture était alors choisi comme le plus déterminant. Compte tenu du critère de fatigue utilisé, c'est le second mécanisme (rupture par fatigue) qui conduisait aux durées de vie les plus courtes. Cependant, l'écart reste faible. Quoi qu'il en soit, les fissures se forment selon les directions de plus grandes déformations plastiques, ce qui témoigne de la dépendance des deux mécanismes [Fletcher et Beynon 00], et le modèle de comportement du matériau joue évidemment un rôle important dans l'estimation de la déformation progressive [Ringsberg 00].

Nous avons donc souhaité tester le modèle à distorsion sur un cas proche de celui rencontré en contact glissant roue-rail, où les champs de déformation et de contrainte sont non-homogènes. Cet essai de structure doit servir d'essai de validation finale pour le modèle.

Nous avons mis en place un essai original de rochet de contact. Parallèlement, une nouvelle campagne d'identification du modèle est menée sur le matériau utilisé dans cet essai, un acier inoxydable de type 316L légèrement différent de ceux utilisés dans les deux précédentes identifications du modèle. Des essais d'écrouissage uniaxial et multiaxial sous chargements complexes avaient déjà été réalisés sur ce matériau par Sylvain Calloch [Calloch 97]. Il reste donc à effectuer des essais complémentaires de rochet uniaxial et multiaxial avec quelques détections de surfaces seuil. Enfin, l'essai de rochet de contact est un essai de structure. La simulation de cet essai passe donc par l'intermédiaire d'un code de calcul aux éléments finis dans lequel le modèle à distorsion doit être introduit.

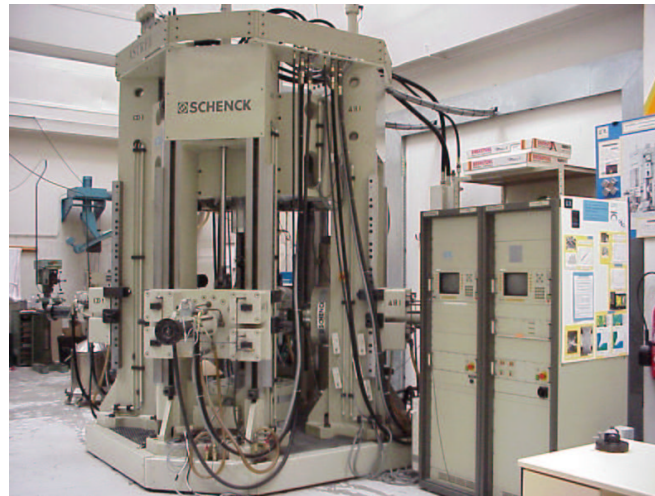


FIG. 5.1 – Machine d'essais triaxiale Astrée

## 5.2 Présentation des moyens d'essais

L'essai de rochet de contact a été réalisé sur la machine d'essais triaxiale Astrée du LMT Cachan (Fig. 5.1). Cette machine électro-hydraulique asservie est constituée de 6 vérins installés selon trois directions orthogonales deux à deux. Les deux vérins verticaux montés respectivement sur le soubassement fixe et sur la traverse supérieure mobile ont une capacité de  $\pm 250$  kN et une course de  $\pm 300$  mm. Les quatre vérins horizontaux ont une capacité de  $\pm 100$  kN et une course de  $\pm 300$  mm. Ils sont installés sur les colonnes verticales et peuvent être disposés à la demande (par exemple en opposition : traction-compression, ou d'un même côté : flexion). Des verrouillages mécaniques assurent la coplanéité et la convergence des axes des vérins. Les tiges des vérins sont guidées par des paliers hydrostatiques, dimensionnés pour supporter les efforts radiaux induits par les autres lignes de chargement en cours d'essai ou par la rupture de l'éprouvette ou de la structure désirée.

En plus des possibilités classiques de régulation en effort, position ou déformation, chaque vérin peut être asservi en force ou en déplacement par rapport à son opposé (asservissement couplé). Ce dernier mode d'asservissement est appelé "Modal Effort" et le schéma de principe est donné sur la figure 5.2. L'objectif de ce mode d'asservissement est de rendre un vérin dépendant de celui qui lui est opposé. De façon classique, une ligne de deux vérins a besoin de deux variables de contrôle. Dans le cas du "Modal Effort", l'une de ces deux variables est la demi-différence des déplacements des deux vérins  $\frac{d_1 - d_2}{2}$ ; elle gère la position du centre de l'axe considéré. L'autre variable est la demi-somme des efforts exercés par les deux vérins considérés  $\frac{F_1 + F_2}{2}$ ; elle gère donc la moyenne des efforts appliqués sur un axe.

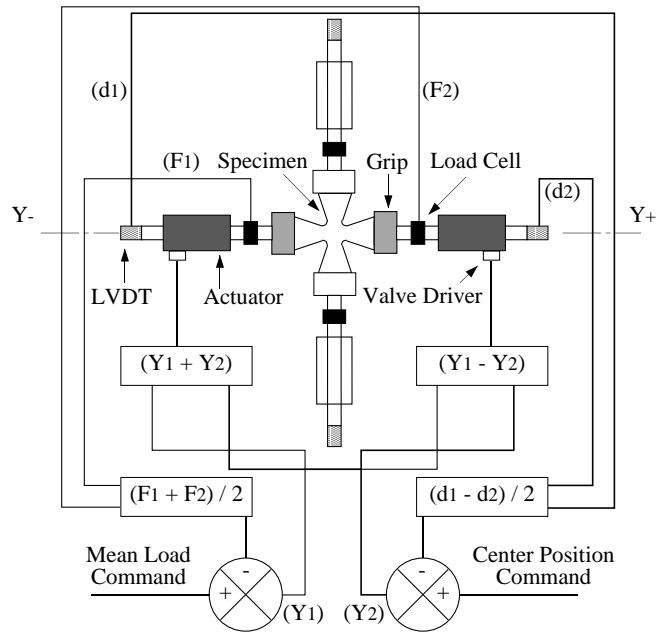


FIG. 5.2 – Schéma de fonctionnement de la régulation “Modal Effort”, d’après Calloch [Calloch 97].

### 5.3 Principe de l’essai de rochet de contact

Des photographies du montage d’essai sont présentées sur la figure 5.3 et un schéma de principe est représenté sur la figure 5.4. Deux massifs plans en acier inoxydable sont placés de part et d’autre d’une bille de roulement de diamètre 82 mm, dont le comportement est supposé rester élastique. Chaque massif est fixé sur un des deux vérins verticaux de la machine.

L’essai se réalise en deux temps :

1. On réalise une indentation des deux massifs par la sphère en appliquant un effort de compression identique  $F_N = 50 \text{ kN}$  sur les deux vérins verticaux,
2. On rapporte ensuite un vérin horizontal (à droite sur les photos de la figure 5.3) pour pousser la sphère de manière cyclique autour d’un effort moyen  $F_{T\text{moy}}$  non nul.

Le trajet de chargement typique est reporté sur la figure 5.5. On espère, par ce type d’essai, obtenir une déformation progressive non seulement sur l’axe vertical du fait de l’effort constant, mais aussi et surtout dans la direction transverse (horizontale), du fait du chargement cyclique décalé autour d’un effort non nul.

L’utilisation de deux massifs en acier inoxydable (au lieu d’un seul) a pour seul objectif de rendre l’essai symétrique afin d’éviter des flexions parasites et de pouvoir faire passer des efforts verticaux relativement importants.

Les déplacements verticaux relatifs des deux plans sont mesurés à l’aide d’un capteur analogique capable de mesures au micromètre près. Des capteurs de même type sont

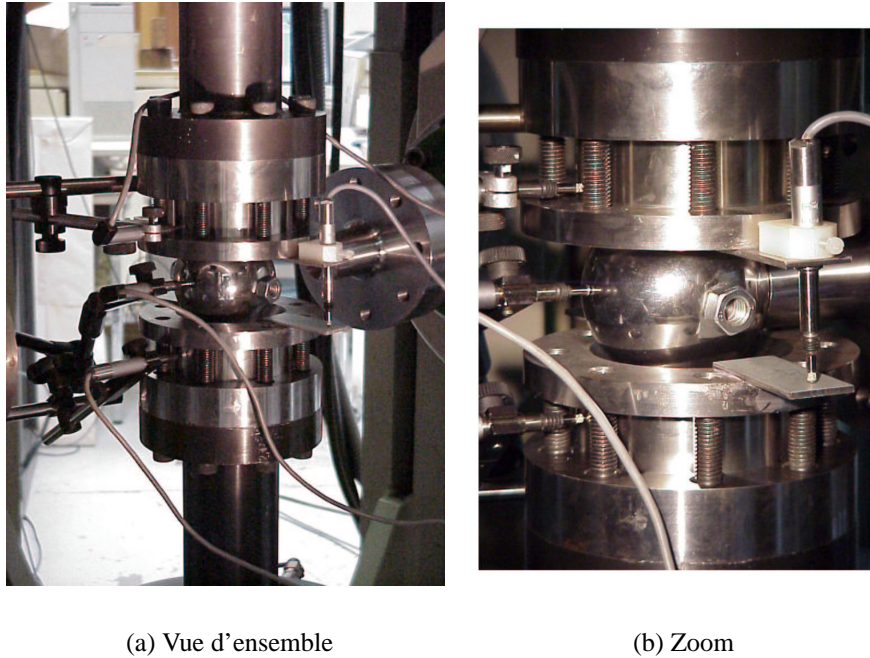


FIG. 5.3 – Photographies du montage d'essai

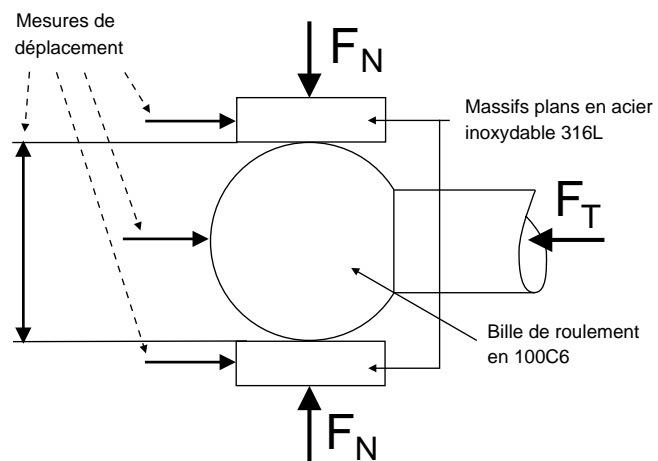
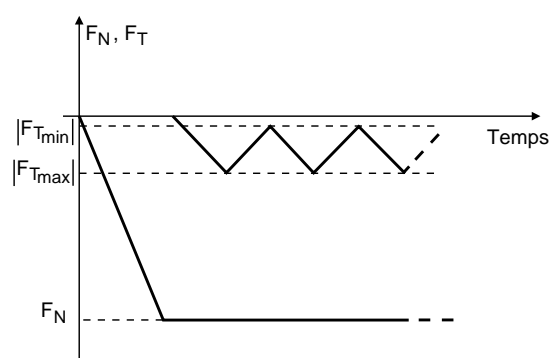
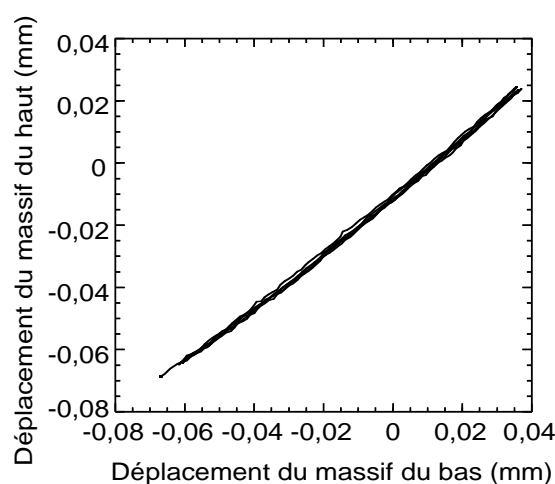


FIG. 5.4 – Schéma du principe de l'essai de rochet de contact

FIG. 5.5 – *Trajet de chargement pour l'essai de rochet de contact*FIG. 5.6 – *Comparaison entre les déplacements horizontaux des deux massifs en acier inoxydable*

utilisés pour mesurer le déplacement horizontal relatif de la sphère par rapport aux deux plans en acier inoxydable (Fig. 5.3(b)). Etant donné le dispositif choisi, il est clair que les axes verticaux vont fléchir sous l'action du vérin horizontal, ce qui justifie que l'on mesure les déplacements de la sphère et des deux massifs par rapport au bâti de manière indépendante. Le déplacement relatif de la sphère par rapport aux deux massifs s'obtient ensuite en calculant la différence entre la moyenne des mesures faites sur les massifs et la mesure faite sur la sphère. On vérifie au passage à chaque essai que les déplacements des deux massifs sont à peu près égaux (Fig. 5.6), ce qui nous garantit la symétrie de l'essai.

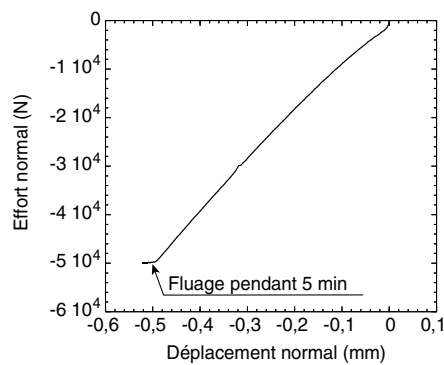
## 5.4 Précautions particulières

Avant de commencer chaque essai, il fallait positionner la sphère de telle sorte que le vérin horizontal vienne ensuite s'appuyer correctement sur celle-ci lors du chargement cyclique. Pour ce faire, nous avons utilisé le vérin horizontal placé en opposition de celui utilisé par la suite dans l'essai. Sur chacun de ces deux vérins horizontaux, un support à embout sphérique de même rayon que la bille de roulement a été mis en position et bridé une fois mis en contact avec la sphère. On pouvait alors s'assurer de la bonne mise en position en faisant tourner la sphère entre ces deux pièces. Dans cette position, les deux vérins verticaux ont été approchés jusqu'à toucher la sphère sous un effort (quasi) nul (environ 1 kN de précharge). Nous avons alors changé le mode d'asservissement des vérins verticaux et sommes passés en "Modal Effort" (voir paragraphe (5.2)). Nous souhaitions en effet réaliser le chargement vertical en effort sans que la sphère ne se déplace verticalement. Nous avons donc imposé que la consigne sur la demi différence des déplacements reste nulle. Auparavant, nous avions enlevé les deux vérins horizontaux pour laisser libres les déformations élastiques de la sphère. Une précaution essentielle dans cet essai consiste à s'assurer du non-glissement entre la sphère et les massifs pour ne pas attribuer au déplacement relatif de la sphère une fausse accumulation de déformation plastique, et accessoirement pour ne pas obtenir un comportement dangereux de la machine, la consigne d'asservissement étant imposée sur la voie d'effort. Pour éviter ce problème, nous avons tout d'abord appliqué un effort normal suffisamment important pour créer une empreinte entre la sphère et les plans, ce qui a permis à la sphère de transmettre les efforts horizontaux par obstacle et non uniquement par frottement. De plus, nous avons réalisé un essai où l'axe horizontal poussait la bille jusqu'à ce qu'elle glisse, le vérin étant cette fois-ci piloté en déplacement. Cet essai nous a alors donné le niveau d'effort à ne pas dépasser dans les autres essais pour éviter le glissement bille-plan :  $F_{Tmax} = 9,5$  kN pour un effort normal aux plans de 50 kN.

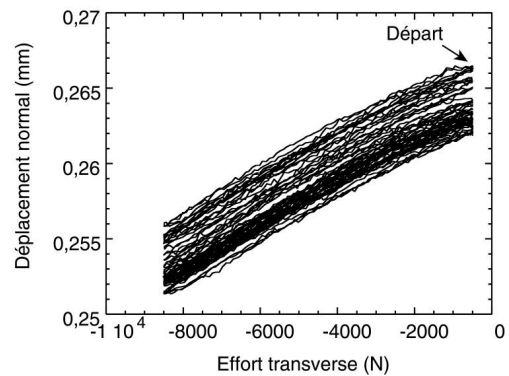
Enfin, nous avons rencontré des problèmes importants de reproductibilité des résultats d'essais entre deux couples de plans obtenus pourtant à partir du même brut. Nous obtenions une différence d'un ordre de grandeur entre les deux essais du point de vue de la déformation progressive. Nous avons soupçonné l'état de surface et notamment les contraintes résiduelles dues à l'opération de rectification d'être responsables de ce problème et avons donc poli les massifs jusqu'à obtenir un état miroir. Cette précaution s'est avérée suffisante pour obtenir les mêmes résultats quel que soit le couple de massifs choisi.

## 5.5 Premiers résultats et perspectives

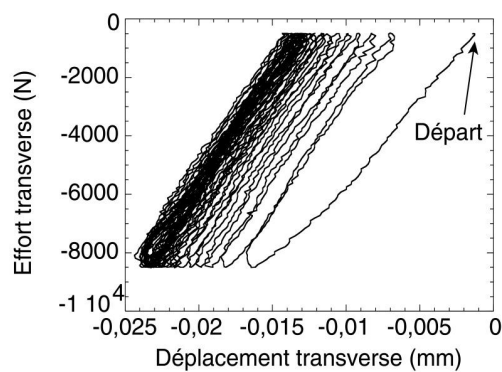
Nous avons appliqué un effort normal de 50kN puis un effort tangentiel oscillant entre -8,5kN et -0.5kN. Les résultats de cet essai sont reportés sur la figure 5.7. On observe effectivement une déformation progressive. Néanmoins, cette déforma-



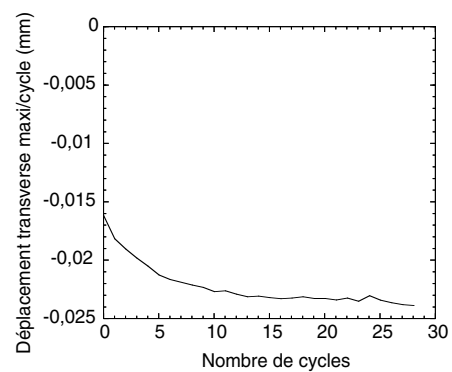
(a) Indentation initiale jusqu'à un effort de -50 kN



(b) Déplacement normal en fonction de l'effort transverse



(c) (Effort transverse - Déplacement transverse)



(d) Déplacement transverse en fonction du nombre de cycles

FIG. 5.7 – *Rochet de contact pour un effort normal de 50 kN et un effort transverse cyclique entre -8,5 kN et -0,5 kN*



tion progressive sature très rapidement (au bout d'une quinzaine de cycles environ) et le déplacement mesuré est extrêmement faible (à peine un centième de millimètre à partir du premier cycle). Ces résultats sont relativement décevants dans la mesure où l'on souhaitait les utiliser pour valider un modèle conçu pour prédire la déformation progressive. En effet, notre sentiment est que n'importe quel modèle macroscopique, y compris un modèle qui ne prévoit pas de rochet matériau comme par exemple un modèle à écrouissage purement isotrope, pourrait prédire ce faible niveau de déformation progressive suivi d'une accommodation. Nous avons donc augmenté la valeur (absolue) de l'effort tangentiel maximum jusqu'à 9 kN mais cela n'a rien changé. Or, l'effort limite provoquant le glissement de la bille est de 9,5 kN, ce qui nous empêche de continuer dans cette voie. Par ailleurs, nous aurions pu augmenter l'effort normal pour approfondir l'empreinte sous la sphère de manière à pouvoir faire passer un effort tangentiel plus important, mais un calcul par éléments finis <sup>1</sup> nous donne une déformation plastique cumulée sous le contact de 5,5 % pour un effort normal de 50 kN, ce qui est déjà relativement élevé dans la mesure où nous souhaitons rester dans l'hypothèse des petites perturbations. Nous sommes donc également limités de ce point de vue. En fait, tout semble se passer comme si la déformation progressive observée était en fait due à la viscosité (bien connue) du matériau. Pour vérifier cette hypothèse, un essai de fluage à effort tangentiel constant va donc être réalisé.

Si cette hypothèse est vérifiée, cela signifiera (en négligeant les effets visqueux) qu'il y a en fait adaptation dès le premier cycle. Il faudra donc trouver un nouveau trajet de chargement pour que le matériau plastifie à chaque cycle, sous un effort moyen non nul.

Dans ce cas, nous serons donc amenés à utiliser également l'axe horizontal opposé à celui utilisé précédemment. Ce nouveau vérin nous permettra en effet d'appliquer à la sphère un effort qui change de signe, et nous espérons ainsi plastifier l'acier inoxydable à chaque demi-cycle. Nous avons tout d'abord écarté cette solution pour plusieurs raisons :

- Elle complexifie la mesure du déplacement de la sphère par rapport aux massifs d'acier inoxydable,
- Elle risque de provoquer un “décollement” entre la sphère et les massifs du côté du vérin qui exerce l'effort. Si tel est le cas, la gestion de contact intermittent devient problématique du point de vue de la simulation numérique de l'essai.

Une fois que le trajet de chargement expérimental aura été optimisé vis-à-vis du rochet, nous pourrons alors simuler ce trajet de chargement à l'aide du code de calcul Abaqus [ABA 98] dans lequel la géométrie du problème a été implantée.

---

1. Le modèle utilisé pour faire ce calcul est un modèle à un écrouissage cinématique non-linéaire [Armstrong et Frederick 66] associé à un écrouissage isotrope non-linéaire. Il a été identifié par P. Kazysinski [Kaszinski 99] sur un acier inoxydable 316L pour des problèmes d'indentation cyclique



## **Conclusion et perspectives**

Ce travail avait pour objectif d'améliorer la capacité des modèles macroscopiques phénoménologiques à décrire les cinétiques de rochet à la fois lors de trajets uniaxiaux et multiaxiaux. Il s'inscrit dans la démarche plus générale qui vise à optimiser la simulation du comportement de structures métalliques soumises à un chargement cyclique. La piste que nous avons alors choisi de suivre était de prendre en compte la distorsion du domaine d'élasticité. À l'issue d'une étude bibliographique comparative, nous avons retenu un modèle à distorsion dans lequel nous avons introduit des lois d'évolution pertinentes en ce qui concerne le phénomène de rochet multiaxial. Certaines de ces lois étaient issues de la littérature mais d'autres, comme la rotation du repère mobile, sont nouvelles.

Pour réaliser ce travail, nous avons suivi une démarche générale de développement de modèles macroscopiques. Cette démarche s'appuie tout d'abord sur un certain nombre d'outils, à savoir d'une part une base d'essais macroscopiques réalisés sur éprouvettes tubulaires en traction-torsion [Portier 99] et en traction-torsion-pression interne [Bocher *et al.* 01], d'autre part un modèle micro-macro développé au Centre des Matériaux de l'École de Mines [Cailletaud 87], [Pilvin 90], et enfin de nombreux modèles macroscopiques issus de la littérature et permettant de décrire partiellement le phénomène de rochet ou la distorsion du domaine d'élasticité.

La construction du nouveau modèle s'est alors faite en respectant les étapes suivantes, afin de ne pas cumuler toutes les difficultés dès le début du travail :

- Un dialogue entre un modèle micro-macro et le modèle macroscopique,
- Une identification et une validation du modèle macroscopique sur les résultats numériques du modèle micro-macro,
- Une identification du modèle macroscopique sur des résultats d'essais obtenus sur un matériau réel,
- Une validation du modèle macroscopique sur de nouveaux résultats d'essais obtenus sur le même matériau, au niveau de l'élément de volume,
- Une validation du modèle macroscopique sur des résultats d'essais obtenus sur une mini-structure représentative d'un problème industriel <sup>2</sup>.

Notons qu'il s'agit d'un processus itératif dans la mesure où chaque étape peut remettre en cause les hypothèses formulées initialement même si ces dernières ont été validées dans l'étape précédente.

Dans notre cas, le modèle à distorsion sur lequel nous nous sommes appuyés nous est apparu trop complexe à utiliser tel qu'il était présenté dans sa version la plus générale. Il fallait alors le simplifier judicieusement, en s'assurant que cela ne porterait pas à conséquence sur les prévisions du phénomène de rochet. Nous avons donc fait le choix de partir de la version la plus simple possible quitte à l'enrichir par la suite au fur et à mesure des étapes de construction.

Le dialogue initial entre deux niveaux de modélisation différents - l'approche ma-

---

2. en l'occurrence un problème de rochet de contact.

croscopique que nous souhaitons enrichir d'une part et l'approche micromécanique<sup>3</sup> d'autre part - nous a permis d'éliminer la première version du modèle macroscopique que nous proposons, et de choisir une nouvelle version de ce modèle qui soit plus en accord avec les résultats obtenus avec le modèle polycristallin.

Une fois acquise cette validation du modèle macroscopique vis-à-vis du modèle polycristallin, c'est sans (trop de) surprise que l'identification du modèle à distorsion sur un matériau réel nous a donné des résultats satisfaisants, le modèle ayant en quelque sorte été construit sur des bases "physiques".

Par ailleurs, une extension du modèle à distorsion pour des trajets de dimension supérieure à deux a ensuite été proposée. L'essentiel du travail consistait à écrire une loi d'évolution cohérente mécaniquement pour la rotation de la direction de la distorsion dans l'espace complet des déviateurs. Nous avons ensuite détaillé comment utiliser la méthode proposée par Schaub *et al.* [Schaub *et al.* 95] pour intégrer simplement cette loi d'évolution particulière.

Il existe désormais deux versions du modèle à distorsion : la première, "Distor2D", dédiée aux seuls trajets biaxiaux fréquemment étudiés dans la littérature, et la deuxième, "Distor5D", valable pour tout type de chargement *a priori*. La première version présente l'avantage d'être moins coûteuse en temps de calcul ; c'est la raison pour laquelle nous pensons qu'elle présente un réel intérêt. Quant à la version plus complète, elle devrait nous permettre de mener à bien des calculs sur des structures réalistes.

Dans les deux versions du modèle, l'écrouissage monotone et cyclique ainsi que le phénomène de déformation progressive sont convenablement représentés sous sollicitations uniaxiales et multiaxiales non-proportionnelles.

Les perspectives à court terme de ce travail sont tout d'abord expérimentales. De nouveaux essais de rochet de contact doivent en effet être réalisés pour obtenir un trajet de chargement qui produise une quantité de déformation plastique suffisante pour valider le modèle à distorsion. Parallèlement, des essais d'identification du matériau sont menés pour compléter la base d'essais déjà réalisés par Calloch [Calloch 97]. Enfin, une implantation du modèle à distorsion dans un code de calcul aux éléments finis est prévue pour pouvoir simuler l'essai de rochet de contact et valider, ou non, le modèle. A moyen terme, on peut envisager de tester le modèle sur d'autres essais matériau, notamment dans des configurations qui lui sont *a priori* défavorables, comme par exemple des trajets en croix où le repère mobile est amené à tourner très rapidement, ce qui peut provoquer des erreurs de prévision. D'autre part, on peut également chercher à identifier le modèle sur des essais obtenus avec d'autres matériaux dont le comportement diffère de celui de l'acier inoxydable de type 316L.

À plus long terme se pose le problème de l'effet de la distorsion du domaine d'élasticité sur la description d'un comportement viscoplastique du matériau. En effet, le modèle

---

3. *a priori* plus efficace que la précédente puisqu'elle prend en compte des aspects plus physiques du comportement.

proposé dans ce travail est certes écrit dans un cadre viscoplastique, mais toutes les identifications ont été faites de telle sorte que le comportement soit indépendant de la vitesse de chargement. On a donc plutôt décrit un comportement “plastique”. Lorsque l’on souhaite prendre en compte le caractère visqueux du matériau, la limite apparente d’élasticité (sur une courbe de traction par exemple) devient supérieure à la limite d’élasticité imposée dans le modèle, et ce d’autant plus que la vitesse de chargement simulée est élevée. Ainsi, pour obtenir des résultats d’identification identiques (sur des essais à vitesse constante) sur une version qui prend en compte la viscosité du matériau et sur une version qui ne la prend pas en compte, on doit généralement choisir une limite d’élasticité bien plus faible dans la première version ce qui se traduit par une taille du domaine d’élasticité réduite dans ce cas. Les premiers résultats de simulation montrent qu’alors, la prise en compte de la distorsion du domaine d’élasticité n’est plus aussi efficace que dans le présent travail. De nouveaux développements sont donc nécessaires.

Enfin, on peut imaginer d’utiliser la distorsion du domaine d’élasticité dans toute application où une prédiction fine de l’écoulement plastique est nécessaire. Citons par exemple les problèmes de fatigue oligocyclique, ou encore les problèmes de mise en forme des matériaux par déformation plastique. La bonne description de la direction de l’écoulement plastique pourrait être une voie d’amélioration significative pour certains modèles.

# **Bibliographie**





# Bibliographie

- [ABA 98] *Abaqus, V5.8, Theory Manual*, Hibbitt, Karlsson and Sorensen Inc., 1998.
- [AL 02] Abdul-Latif A., On the Multiaxial Ratcheting of Polycrystals, *Plasticity, Damage and Fracture at Macro, Micro and Nano Scales*, éd. par Khan A. S. et Lopez-Pamies O., pp. 465–467, Neat Press, 2002, Aruba.
- [Ambrico et Begley 00] Ambrico J. M. et Begley M. R., Plasticity in Fretting Contact, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, 2000, pp. 2391–2417.
- [Armstrong et Frederick 66] Armstrong P. J. et Frederick C. O., *A Mathematical Representation of the Multiaxial Baushinger Effect*, Cegb report rd/b/n731, Berkeley Nuclear Laboratories, 1966.
- [Bari et Hassan 00] Bari S. et Hassan T., Anatomy of Coupled Constitutive Models for Ratchetting Simulation, *Int. J. of Plasticity*, vol. 16, 2000, pp. 381–409.
- [Bari et Hassan 02] Bari S. et Hassan T., An Advancement in Cyclic Plasticity Modeling for Multiaxial Ratcheting Simulation, *Int. J. of Plasticity*, vol. 18, 2002, pp. 873–894.
- [Benallal 89] Benallal A., *Thermoviscoplasticité et Endommagement des Structures*, Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1989.
- [Benallal et Marquis 88] Benallal A. et Marquis D., Effects of Non-Proportional Loadings in Cyclic Elasto-Viscoplasticity : Experimental, Theoretical and Numerical Aspects, *Eng. Comput.*, vol. 5, 1988, pp. 241–247.
- [Benallal et al. 89] Benallal A., Legallo P. et Marquis D., An Experimental Investigation of Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel and of 2024 Aluminum Alloy Under Multiaxial Loadings, *Nucl. Eng. Design*, vol. 114, 1989, p. 345.
- [Bhargava et al. 85] Bhargava V., Hahn G. T. et Rubin C. A., An Elastic-Plastic Finite Element Model of Rolling Contact, Part I & II, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, 1985, pp. 67–82.
- [Bocher et al. 01] Bocher L., Delobelle P., Robinet P. et Feaugas X., Mechanical and Microstructural Investigations of an Austenitic Stainless Steel under Non-Proportional Loadings in Tension-Torsion- Internal and External Pressure, *Int. J. of Plasticity*, vol. 17, n11, 2001, pp. 1491–1530.
- [Boucher et Cordebois 91] Boucher M. et Cordebois J.-P., *Evolution Incrémentale de l'Anisotropie Induite*, Rapport interne n117, LMT, Paris VI, 1991.

- [Bower 89] Bower A. F., Cyclic Hardening Properties of Hard-Drawn Copper and Rail Steel, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 37, n4, 1989, pp. 455–470.
- [Bower et Johnson 89] Bower A. F. et Johnson K. L., The Influence of Strain Hardening on Cumulative Plastic Deformation in Rolling and Sliding Line Contact, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 37, n4, 1989, pp. 471–493.
- [Bui 66] Bui H. D., Écrouissage des Métaux, *Compte-rendu de l'Académie des Sciences*, vol. AB262, 1966, pp. A401–A404.
- [Burlet et Cailletaud 87] Burlet H. et Cailletaud G., Modeling of Cyclic Plasticity in Finite Element Codes, *Proceedings of Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, pp. 1157–1164, 1987.
- [Cailletaud 87] Cailletaud G., *Une Approche Micromécanique Phénoménologique du Comportement Inélastique des Métaux*, Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1987.
- [Calloch 97] Calloch S., *Essais Triaxiaux Non-Proportionnels et Ingénierie des Modèles de Plasticité Cyclique*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1997.
- [Chaboche 87] Chaboche J.L., Cyclic plasticity modeling and ratchetting effects, *Proced. of Constitutive Laws for Engineering Materials, Theory and Applications*, 1987, pp. 47–58.
- [Chaboche 91] Chaboche J.L., On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects, *Int. J. of Plasticity*, vol. 7, 1991, pp. 661–678.
- [Chaboche 92] Chaboche J.L., *Modeling of Ratchetting : Evaluation of Various Approaches*, International seminar on multiaxial plasticity, MECAMAT92, LMT-Cachan, France, 1992.
- [Chaboche et al. 79] Chaboche J.L., Van K. Dang et Cordier G., Modelization of the Strain Memory Effect on the Cyclic Hardening of 316 Stainless Steel, *Proceedings of the 5th SMIRT Conference*, pp. 13–17, 1979, Paper L11/3.
- [Chaboche et al. 89] Chaboche J.L., Nouailhas D., Paulmier P. et Policella H., Sur les Problèmes Posés par la Description des Effets de Rochet en Plasticité et Viscoplasticité Cyclique, *La Recherche Aérospatiale*, vol. 1, 1989, pp. 63–79.
- [Clavel et Feaugas 94] Clavel M. et Feaugas X., Micromechanisms of plasticity under multiaxial cyclic loading, *Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, pp. 17–30, Société Française de Métallurgie et de matériaux (SF2M), 1994.
- [Clavel et al. 89] Clavel M., Pilvin P. et Rahouadj R., Analyse microstructurale de la déformation plastique sous sollicitations non proportionnelles dans un alliage base nickel, *C. R. Acad. Sci. Paris, t.309, série II, Métallurgie*, 1989, pp. 689–694.
- [Clément et al. 84] Clément G., Lebey J. et Tremblais A., *Essais de déformation progressive de l'acier inoxydable EDF-SPH à la température de 600 ° C*, Note interne, CEA, 1984.

- [Corona *et al.* 96] Corona E., Hassan T. et Kyriakides S., On the Performance of Kinematic Rules in Predicting a Class of Biaxial Ratchetting Histories, *Int. J. of Plasticity*, vol. 12, n1, 1996, pp. 117–145.
- [Delobelle 89] Delobelle P., Etude expérimentale de l'effet de rochet de traction-torsion d'un acier inoxydable 17-12 Mo-SPH de 20 à 650 ° C, *Journal of Nuclear Materials*, vol. 166, 1989, pp. 364–378.
- [Delobelle et Robinet 93] Delobelle P. et Robinet P., Etude expérimentale et Modélisation Phénoménologique du Rochet Uni et Bidirectionnel à Haute Température d'un Acier Inoxydable Austénitique, *La Recherche Aérospatiale*, n5, 1993, pp. 1–15.
- [Delobelle *et al.* 95] Delobelle P., Robinet P. et Bocher L., Experimental Study and Phenomenological Modelization of Ratchet under Uniaxial and Biaxial Loading on an Austenitic Stainless Steel, *Int. J. of Plasticity*, vol. 11, n4, 1995, pp. 295–330.
- [Doong *et al.* 90] Doong S-H, Socie D. F. et Robertson I. M., Dislocation Substructures and Nonproportional Hardening, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 112, 1990, pp. 456–464.
- [Doquet 89] Doquet V., *Comportement et endommagement de deux aciers à structure cubique centrée et cubique à faces centrées, en fatigue oligocyclique, sous chargement multiaxial non-proportionnel*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1989.
- [Doquet 93] Doquet V., Twinning and Multiaxial Cyclic Plasticity of a Low Stacking-Fault Energy F.C.C. Alloy, *Acta Metallurgica*, vol. 41, n8, 1993, pp. 2451–2459.
- [Doquet et Pineau 90] Doquet V. et Pineau A., Extra Hardening due to Cyclic Non-Proportional Loading of an Austenitic Stainless Steel, *Scripta Metallurgica et Materialia*, vol. 24, 1990, pp. 433–438.
- [Eisenberg et Yen 84] Eisenberg M. A. et Yen C-F, The Anisotropic Deformation of Yield Surfaces, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 106, 1984, pp. 355–360.
- [Erieau *et al.* 00] Erieau P., Le Bot G., Godereaux S. et Pilvin P., Hierarchical Mechanical Behaviour Modelling for Metals. Application to Sheet Forming Processes., *Advances in Mechanical Behaviour, Plasticity and Damage*, éd. par D. Miannay, P. Costa D. François et A. Pineau EUROMAT2000, pp. 425–430, Elsevier, 2000, Tours.
- [Feaugas 99] Feaugas X., On the Origin of the Tensile Flow Stress in the Stainless Steel AISI 316L at 300K: Back Stress and Effective Stress, *Acta Mat.*, vol. 47, 1999, pp. 3617–3632.
- [Feaugas et Gaudin 01] Feaugas X. et Gaudin C., Different Levels of Plastic Strain Incompatibility during Cyclic Loading: in terms of Dislocation Density and Distribution, *Materials Science and Engineering*, vol. A309-310, 2001, pp. 382–385.
- [Fletcher et Beynon 00] Fletcher D. I. et Beynon J. H., The Effect of Contact Load Reduction on the Fatigue Life of Pearlitic Rail Steel in Lubricated Rolling-Sliding Contact, *Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct.*, vol. 23, 2000, pp. 639–650.

- [François 01] François M., A Plasticity Model with Yield Surface Distortion for Non Proportional Loading, *Int. J. of Plasticity*, vol. 17, n5, 2001, pp. 703–717.
- [François et al. 91] François D., Pineau A. et Zaoui A., *Comportement Mécanique des Matériaux, Volume 1 & 2*, Hermes, 1991.
- [Franciosi 85] Franciosi P., The Concepts of Latent Hardening and Strain Hardening in Metallic Single Crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 33, 1985, pp. 1601–1612.
- [Franciosi et al. 80] Franciosi P., Berveiller M. et Zaoui A., Latent Hardening in Copper and Aluminium Single Crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 28, 1980, pp. 273–283.
- [Frénois et al. 00] Frénois S., Munier E. et Pilvin P., A Polycrystalline Model for Stress-Strain Behaviour of Tantalum, *Advances in Mechanical Behaviour, Plasticity and Damage*, éd. par Miannay D., Costa P., François M. et Pineau A., pp. 431–436, ELSEVIER, 2000.
- [Gaudin 02] Gaudin C., *Étude des mécanismes associés au rochet cyclique d'un acier austénitique AISI: 316L*, Thèse de doctorat, Université Technologique de Compiègne, 2002.
- [Gaudin et Feaugas 99] Gaudin C. et Feaugas X., *Approche Expérimentale des mécanismes de déformation plastique associés au rochet cyclique du 316L*, Report, 1999, Compiègne.
- [Gaudin et Feaugas 00] Gaudin C. et Feaugas X., *Approche Expérimentale des mécanismes de déformation plastique associés au rochet cyclique du 316L pour  $T < 973K$* , Report, 2000, Compiègne.
- [Goodman 83] Goodman A. M., *Development of Constitutive Equations for Computer Analysis of Stainless Steel Components*, 4th int. seminar on inelastic analysis and life prediction in high temperature environment, 1983, Chicago.
- [Gupta et Meyers 92] Gupta N. K. et Meyers A., Considerations of Translated Stress Deviators in Describing Yield Surfaces, *Int. J. of Plasticity*, vol. 8, 1992, pp. 729–740.
- [Gupta et Meyers 94] Gupta N. K. et Meyers A., An Alternative Formulation for Interpolating Experimental Yield Surfaces, *Int. J. of Plasticity*, vol. 10, n7, 1994, pp. 795–805.
- [Harvey et al. 83] Harvey S. J., Adkin P. et Jeans P. J., Anisotropic Yield Surfaces in Cyclic Plasticity, *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, vol. 6, n1, 1983, pp. 89–99.
- [Hassan et Kyriakides 92] Hassan T. et Kyriakides S., Ratcheting in Cyclic Plasticity, Part I: Uniaxial Behavior, *Int. J. of Plasticity*, vol. 8, 1992, pp. 91–116.
- [Hassan et Kyriakides 94a] Hassan T. et Kyriakides S., Ratcheting of Cyclically Hardening and Softening Materials, Part I: Uniaxial Behavior, *Int. J. of Plasticity*, vol. 10, n2, 1994, pp. 149–184.
- [Hassan et Kyriakides 94b] Hassan T. et Kyriakides S., Ratcheting of Cyclically Hardening and Softening Materials, Part II: Multiaxial Behavior, *Int. J. of Plasticity*, vol. 10, n2, 1994, pp. 185–212.

- [Hassan *et al.* 92] Hassan T., Corona E. et Kyriakides S., Ratcheting in Cyclic Plasticity, Part II: Multiaxial Behavior, *Int. J. of Plasticity*, vol. 8, 1992, pp. 117–146.
- [Haupt et Schink 96] Haupt A. et Schink B., Experiments on Ratchetting Behavior of AISI 316(L) Austenitic Steel at Room Temperature, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 118, n1, 1996, pp. 281–284.
- [Helling et Miller 87] Helling D. E. et Miller A. K., The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive model, Part I: Equation Development, *Acta Mechanica*, vol. 69, 1987, pp. 9–23.
- [Helling *et al.* 86] Helling D. E., Miller A. K. et Stout M. G., An Experimental Investigation of the Yield Loci of 1100-0 Aluminum, 70:30 Brass, and an Overaged 2024 Aluminum Alloy After Various Prestrains, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 108, 1986, pp. 313–320.
- [Hihi *et al.* 84] Hihi A., Berveiller M. et Zaoui A., Une Nouvelle Formulation de la Modélisation Autocoherente de la Plasticité des Polycristaux Métalliques, *Rapport GRECO Grandes Déformations et Endommagement*, 1984.
- [Hill 50] Hill R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Press, New York, 1950.
- [Hughes et Winget 80] Hughes T. J. R. et Winget J., Finite Rotation Effects in Numerical Integration of Rate Constitutive Equations arising in Large-Deformation Analyses, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 15, 1980, pp. 1862–1967.
- [Ikegami 82] Ikegami K., Experimental Plasticity of the Anisotropy of Metals, *Colloques internationaux du C.N.R.S.*, n295, 1982, pp. 201–242, Comportement Mécanique des Solides Anisotropes.
- [Ilyushin 63] Ilyushin A. A., *Plasticity*, Izd. AN SSSR, Moskva, 1963, (en russe).
- [Jiang et Sehitoglu 94] Jiang Y. et Sehitoglu H., Cyclic Ratchetting of 1070 Steel Under Multiaxial Stress States, *Int. J. of Plasticity*, vol. 10, n5, 1994, pp. 579–608.
- [Jiang et Sehitoglu 96] Jiang Y. et Sehitoglu H., Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 63, 1996, pp. 720–725.
- [Kapoor 94] Kapoor A., A Re-Evaluation of the Life to Rupture of Ductile Metals by Cyclic Plastic Strain, *Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct.*, vol. 17, n2, 1994, pp. 201–219.
- [Kaszinski 99] Kaszinski P., *Indentation Cyclique et Déformation Progressive. Étude Expérimentale et Simulation des Contacts Internes à des Implants Chirurgicaux*, Thèse de doctorat, LMT-Cachan, ENS de Cachan / C.N.R.S / Université Pierre et Marie Curie, 1999.
- [Khan et Wang 93] Khan A. S. et Wang X., An Experimental Study on Subsequent Yield Surface after Finite Shear Prestraining, *Int. J. of Plasticity*, vol. 9, 1993, pp. 889–905.
- [Kurtyka 88] Kurtyka T., Parameter Identification of a Distortional Model of Subsequent Yield Surfaces, *Arch. Mech.*, vol. 40, n4, 1988, pp. 433–454.

- [Kurtyka et Życzkowski 85] Kurtyka T. et Życzkowski M., A Geometric Description of Distortional Plastic Hardening of Deviatoric Materials, *Arch. Mech.*, vol. 37, n 4-5, 1985, pp. 383–395.
- [Kurtyka et Życzkowski 96] Kurtyka T. et Życzkowski M., Evolution Equations for Distortional Plastic Hardening, *Int. J. of Plasticity*, vol. 12, n2, 1996, pp. 191–213.
- [Lemaitre et Chaboche 88] Lemaitre J. et Chaboche J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1988.
- [Lorenzo et Laird 84] Lorenzo F. et Laird C., Strain Bursts in the Cyclic Creep of Copper Single Crystals at Ambient Temperature, *Acta Metallurgica*, vol. 32, n5, 1984, pp. 671–680.
- [Marquis 79] Marquis D., *Modélisation et Identification de l'Écrouissage Anisotrope des Métaux*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1979.
- [Marquis 89] Marquis D., *Phénoménologie et Thermodynamique : Couplages entre Thermoélasticité, Plasticité, Vieillissement et Endommagement*, Thèse de doctorat d'état, Université Paris 6, 1989.
- [Matheron et Vilhes 94] Matheron Ph. et Vilhes R., *Essais de traction à 20°C, 2500°C, 350°C et 450°C sur acier inox 316L*, Maquette COTHAA, Rapport technique, CEA, 1994.
- [McDowell 95] McDowell D. L., Stress State Dependence of Cyclic Ratchetting Behavior of Two Rail Steels, *Int. J. of Plasticity*, vol. 11, n4, 1995, pp. 397–421.
- [Mughrabi 83] Mughrabi H., Dislocation wall and cell structures and long-range internal stresses in deformed metal crystals, *Acta Metallurgica*, vol. 31, 1983, pp. 1367–1385.
- [Nayak et Zienkiewicz 72] Nayak G. C. et Zienkiewicz O. C., Convenient Form of Stress Invariants for Plasticity, *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, vol. 14, 1972, pp. 949–953.
- [Ohno et Wang 93] Ohno N. et Wang J. D., Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery, Part I and II, *Int. J. of Plasticity*, vol. 9, 1993, pp. 375–403.
- [Ortiz et Popov 83] Ortiz M. et Popov E. P., Distortional Hardening Rules for Metal Plasticity, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 109, n4, 1983, pp. 1042–1057.
- [Phillips 73] Phillips A., On The Foundation of Thermoplasticity: An Experimental Investigation, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 40, 1973, pp. 891–896.
- [Phillips et Tang 72] Phillips A. et Tang J-L, The effect of Loading Path on the Yield Surface at Elevated Temperatures, *Int. J. Solids Structures*, vol. 8, 1972, pp. 463–474.
- [Phillips et Weng 75] Phillips A. et Weng G. J., An Analytical Study of an Experimentally Verified Hardening Law, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 42, 1975, pp. 375–378.
- [Pilvin 90] Pilvin P., *Approches Multiéchelles pour la Prédiction du Comportement Anélastique des Métaux*, Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1990.

- [Pilvin 94] Pilvin P., *Simulation et Identification de Lois de Comportement*, Rapport technique, 1994, Notice d'utilisation.
- [Pilvin et Geyer 97] Pilvin P. et Geyer P., *Modelling of Uniaxial and Multiaxial Ratchetting of SS 316SPH by a Polycrystalline Approach*, Rapport technique n 14, SMIRT, 1997, Lyon.
- [Ponter et Leckie 98a] Ponter A. R. S. et Leckie F. A., Bounding Properties of Metal-Matrix Composites Subjected to Cyclic Thermal Loading, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n4, 1998, pp. 697–717.
- [Ponter et Leckie 98b] Ponter A. R. S. et Leckie F. A., On the Behaviour of Metal Matrix Composites Subjected to Cyclic Thermal Loading, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n11, 1998, pp. 2183–2199.
- [Portier 99] Portier L., *Contribution à l'étude de la déformation progressive des structures*, Thèse de doctorat, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1999.
- [Portier et al. 00] Portier L., Calloch S., Marquis D. et Geyer P., Ratchetting under Tension-Torsion Loadings: Experiments and Modelling, *Int. J. of Plasticity*, vol. 16, 2000, pp. 303–335.
- [Prager 58] Prager W., Non Isothermal Plastic Deformation, *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, vol. 61, 1958, pp. 176–182.
- [Rees 83] Rees D. W. A., An Examination of Yield Surface Distortion and Translation, 1983.
- [Ringsberg 00] Ringsberg J. W., Cyclic Ratchetting and Failure of a Pearlitic Rail Steel, *Fatigue Frac. Eng. Mater. Struct.*, vol. 23, 2000, pp. 747–758.
- [Ringsberg et al. 00] Ringsberg J. W., Loo-Morey M., Josefson B. L., Kapoor A. et Benon J. H., Prediction of Fatigue Crack Initiation for Rolling Contact Fatigue, *Int. J. Fatigue*, vol. 22, 2000, pp. 205–215.
- [Rousset 85] Rousset M., *Surface Seuil de Plasticité: Détermination Automatique et Modélisation*, Thèse de docteur ingénieur, Université Paris 6, 1985.
- [Ruggles et Krempl 89] Ruggles M. B. et Krempl E., The Influence of the Test Temperature on the Ratchetting Behavior of Type 304 Stainless Steel, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 111, 1989, pp. 378–383.
- [Schaub et al. 95] Schaub H., Tsiotras P. et Junkins J. L., Principal Rotation Representations of Proper NxN Orthogonal Matrices, *Int. J. Engrg Sci.*, vol. 33, 1995, pp. 2277–2295.
- [Stout et al. 85] Stout M. G., Martin P. L., Helling D. E. et Canova G. R., Multiaxial Yield Behavior of 1100 Aluminum following various magnitudes of prestrain, *Int. J. of Plasticity*, vol. 1, 1985, pp. 163–174.
- [Tanaka 94] Tanaka E., A Nonproportionality Parameter and a Viscoplastic Constitutive Model taking into account Amplitude Dependences and Memory Effects of Isotropic Hardening, *Eur. Jour. Mech.*, vol. 13, 1994, pp. 155–173.

- [Vincent et Calloch 02] Vincent L. et Calloch S., Prise en compte de la distorsion du domaine d'élasticité pour l'amélioration de la description du rochet multiaxial : confrontation modèle-expériences, *Colloque IME*, 2002, Besançon.
- [Vincent *et al.* 00] Vincent L., Calloch S., François M. et Marquis D., Ratchetting Modeling Through Yield Surface Distortion, *Advances in Mechanical Behaviour, Plasticity and Damage*, éd. par D. Miannay, P. Costa D. François et A. Pineau EU-ROMAT2000, pp. 469–474, Elsevier, 2000, Tours.
- [Vincent *et al.* 01a] Vincent L., Calloch S. et Marquis D., A Viscoplastic Constitutive Model Describing both Multiaxial Ratchetting and Yield Surface Distortion, *Sixth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue & Fracture*, éd. par de Freitas M., pp. 931–936, 2001, Lisboa.
- [Vincent *et al.* 01b] Vincent L., Calloch S. et Marquis D., Amélioration des Modèles Phénoménologiques pour la Description du Rochet 1D & 2D par la Prise en Compte de la Distorsion du Domaine d'Elasticité, *Multi-approches en Mécanique des Matériaux*, éd. par C. Licht C. Mabru et R. Peyroux, pp. 275–278, Mecamat, 2001, Aussois.
- [Vincent *et al.* 02a] Vincent L., Calloch S., Kurtyka T. et Marquis D., An Improvement of Multiaxial Ratchetting Modeling via Yield Surface Distortion, *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol. 124, n4, 2002, pp. 402–411.
- [Vincent *et al.* 02b] Vincent L., Calloch S., Kurtyka T. et Marquis D., Constitutive Equations taking into account Yield Surface Distortions for Multiaxial Ratchetting, *Plasticity, Damage and Fracture at Macro, Micro and Nano Scales*, éd. par Khan A. S. et Lopez-Pamies O., pp. 534–536, Neat Press, 2002, Aruba.
- [Wu et Yeh 91] Wu H. C. et Yeh W. C., On the Experimental Determination of Yield Surfaces and some Results of Annealed 304 Stainless Steel, *Int. J. of Plasticity*, vol. 7, 1991, pp. 803–826.
- [Życzkowski et Kurtyka 84] Życzkowski M. et Kurtyka T., Generalized Ilyushin's Spaces for a More Adequate Description of Plastic Hardening, *Acta Mechanica*, vol. 52, 1984, pp. 1–13.



## **Annexe A**

### **Modification de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile dans la version simplifiée du modèle à distorsion proposée par Kurtyka et Życzkowski**

La capacité prédictive limitée de la version simplifiée du modèle à distorsion proposée par Kurtyka et Życzkowski nous laisse à penser que la loi d'évolution de la rotation du repère mobile n'est peut-être pas bien choisie. Nous proposons initialement la loi suivante :

$$\dot{\phi} = C_{\phi} \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \dot{p} \quad (\text{A.1})$$

ce qui conduit à orienter l'axe  $\hat{\omega}_1$  vers le point courant de chargement. Lors d'un trajet multiaxial comprenant une séquence plasticité - élasticité - plasticité, il se peut que le nouveau point d'entrée en plasticité se situe près de l'axe  $\hat{\omega}_2$ . Il est alors dommage de faire tourner la surface seuil de  $90^\circ$  alors qu'il suffirait de faire croître la valeur de la distorsion  $d_2$  pour faire naître une bosse au nouveau point de chargement. Pour remédier à ce problème, nous proposons la loi suivante :

$$\begin{cases} \text{si } |\hat{S}_2| > |\hat{S}_1| & \text{alors } \dot{\phi} = -C_{\phi} \arctan \left( \frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} \right) \dot{p} \\ \text{et sinon} & \dot{\phi} = C_{\phi} \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \dot{p} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

De plus, de manière à prédire quantitativement les résultats donnés par le modèle polycristallin, nous ajoutons un paramètre supplémentaire dépendant du matériau,  $m_{\phi}$ , de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{si } |\hat{S}_2| > |\hat{S}_1| & \text{alors } \dot{\phi} = -C_{\phi} \operatorname{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} \right) \right) \left| \arctan \left( \frac{\hat{S}_1}{\hat{S}_2} \right) \right|^{m_{\phi}} \dot{p} \\ \text{et sinon} & \dot{\phi} = C_{\phi} \operatorname{sign} \left( \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right) \left| \arctan \left( \frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1} \right) \right|^{m_{\phi}} \dot{p} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

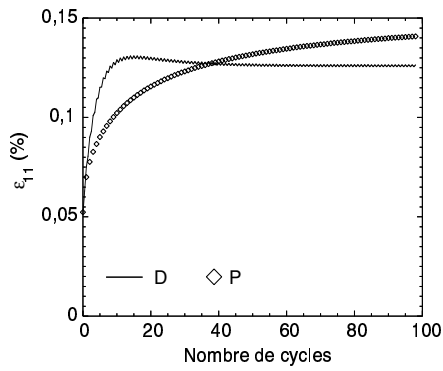
Les résultats de simulation de rochet biaxial et les surfaces seuil obtenues aux maxima des derniers cycles sont présentés sur les figures suivantes.

Comme on peut le constater, les résultats de simulation en termes de déformation progressive sont en meilleur accord avec les résultats du modèle polycristallin que ne l'étaient ceux obtenus avec la première loi de rotation proposée (Eq. A.1)<sup>1</sup>. Cependant, on peut noter que l'essai sous plus forte amplitude de chargement cyclique ( $n^\circ 4$ ) produit moins de rochet que l'essai  $n^\circ 3$  (d'amplitude plus faible), ce qui n'est qualitativement pas acceptable. De plus, on constate que la forme des surfaces seuil obtenues avec cette version du modèle à distorsion ne correspond pas du tout à la forme des surfaces obtenues avec le modèle polycristallin. Cela signifie qu'un tel modèle ne serait pas capable de décrire le comportement d'un matériau lorsque l'on change de direction après un essai de rochet biaxial, par exemple en orientant le chargement vers la compression pure.

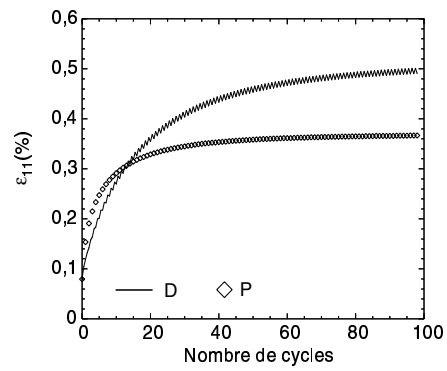
Cette étude nous permet donc d'éliminer (*a priori*) définitivement la première version simplifiée du modèle à distorsion proposée par Kurtyka et Życzkowski, pour ce qui est de la description du phénomène de rochet multiaxial.

---

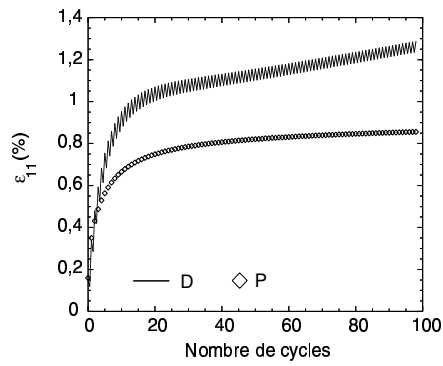
1. Voir les figures 3.9 et 3.15 pour les résultats d'identification de la première loi de rotation.



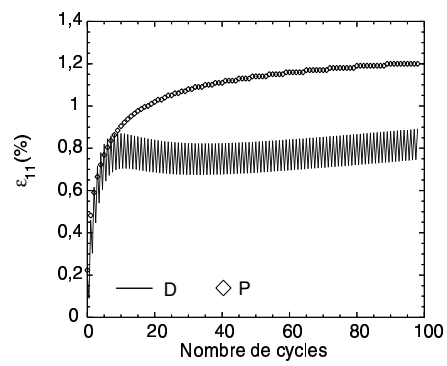
(a) Simulation numéro 1 :  
 $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$



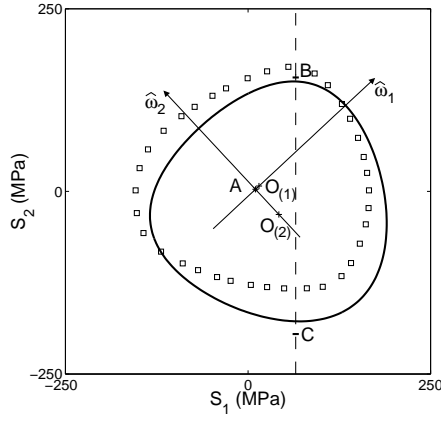
(b) Simulation numéro 2 :  
 $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{12} = \pm 0,2\%$



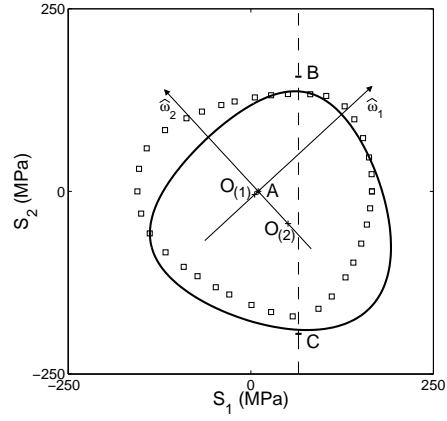
(c) Simulation numéro 3 :  
 $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{12} = \pm 0,5\%$



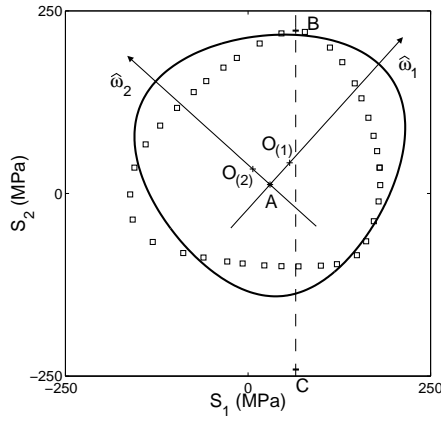
(d) Simulation numéro 4 :  
 $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ;  $\varepsilon_{12} = \pm 0,75\%$



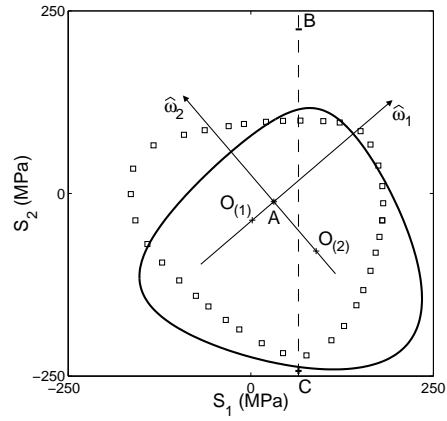
(e) Surfaces seuil lors de la première simulation, en B où  $\epsilon_{12} = 0,1\%$



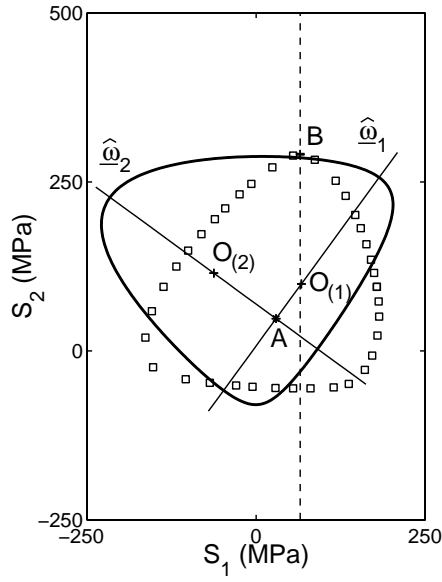
(f) Surfaces seuil lors de la première simulation, en C où  $\epsilon_{12} = -0,1\%$



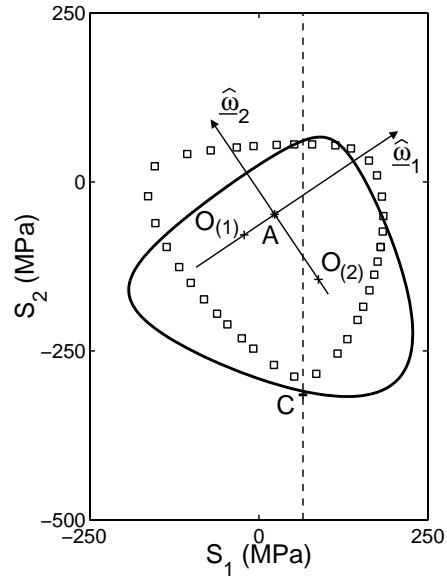
(g) Surfaces seuil lors de la deuxième simulation, en B où  $\epsilon_{12} = 0,2\%$



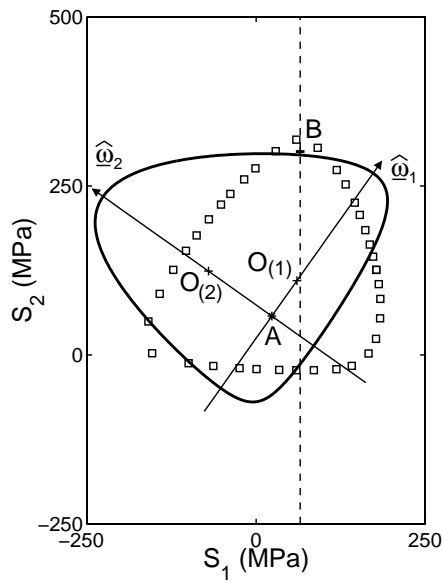
(h) Surfaces seuil lors de la deuxième simulation, en C où  $\epsilon_{12} = -0,2\%$



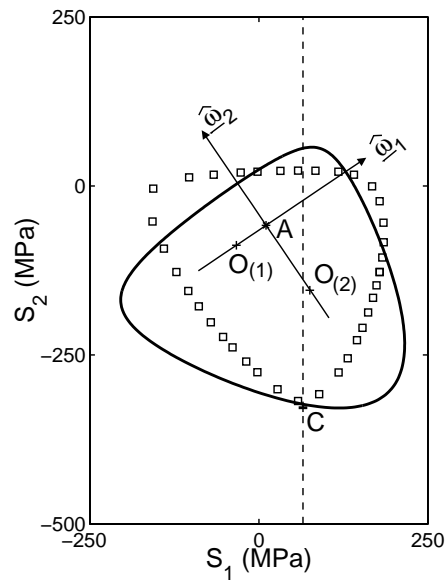
(i) Surfaces seuil lors de la troisième simulation, en B où  $\epsilon_{12} = 0,5\%$



(j) Surfaces seuil lors de la troisième simulation, en C où  $\epsilon_{12} = -0,5\%$



(k) Surfaces seuil lors de la quatrième simulation, en B où  $\epsilon_{12} = 0,75\%$



(l) Surfaces seuil lors de la quatrième simulation, en C où  $\epsilon_{12} = -0,75\%$



## **Annexe B**

**Utilisation de la normale au domaine d'élasticité comme vecteur pour piloter la rotation du repère mobile dans la version 5D du modèle à distorsion**

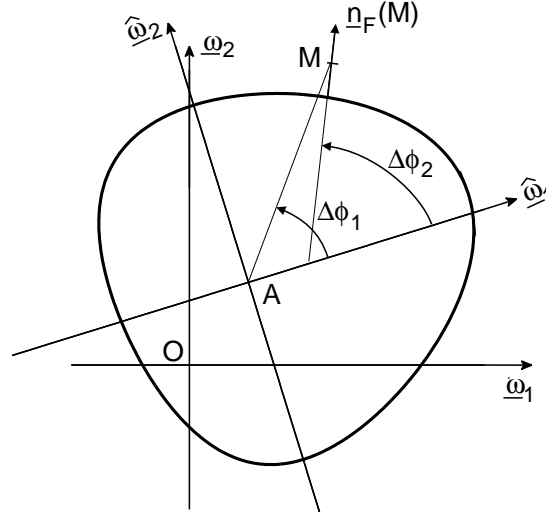


FIG. B.1 – Illustration des deux choix de vecteur retenus pour la loi d'évolution de la rotation du repère mobile

Nous reportons ici des résultats d'identification et de validation d'une nouvelle loi d'évolution pour la rotation du repère mobile (version 5D du modèle), obtenus sur des essais réalisés avec un acier inoxydable COTHAA, de type 316L [Portier *et al.* 00]. Cette loi d'évolution est légèrement différente de celle proposée dans le corps du texte. En effet, rappelons la forme générale de l'équation d'évolution pour la matrice de rotation  $\mathbb{Q}$  du repère mobile :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega' \mathbb{Q} \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\Omega' = -\mathbb{Q} (C_\phi (1 - |\hat{\underline{\omega}}_1 \cdot \underline{m}_2|)^{m_\phi} [\hat{\underline{\omega}}_1 \otimes \underline{m}_2 - \underline{m}_2 \otimes \hat{\underline{\omega}}_1] \dot{p}) \mathbb{Q}^T \quad (\text{B.2})$$

$\underline{m}_2$  est un vecteur unitaire qui définit la direction de chargement, ou du moins la direction vers laquelle on veut orienter la distorsion de la surface seuil. Dans le chapitre 4, notre objectif était de retrouver des résultats similaires à ceux obtenus avec la version 2D du modèle (présentée dans le chapitre 3). C'est la raison pour laquelle nous avons alors choisi pour  $\underline{m}_2$  le vecteur  $\underline{S}_u = \frac{\underline{S} - \underline{X}}{\|\underline{S} - \underline{X}\|}$ .

Ici, nous choisissons un autre vecteur qui est aussi *a priori* un bon candidat, à savoir le vecteur  $\underline{\hat{\epsilon}}^p$ , ou plutôt la normale au domaine d'élasticité  $\underline{n}_F$  de façon à conserver un vecteur unitaire (Fig. B.1). Nous proposons donc une nouvelle version de la loi d'évolution de la rotation du repère mobile :

$$\dot{\mathbb{Q}} = -\Omega' \mathbb{Q} \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\Omega' = -\mathbb{Q} (C_\phi (1 - |\hat{\underline{\omega}}_1 \cdot \underline{n}_F|)^{m_\phi} [\hat{\underline{\omega}}_1 \otimes \underline{n}_F - \underline{n}_F \otimes \hat{\underline{\omega}}_1] \dot{p}) \mathbb{Q}^T \quad (\text{B.4})$$

et nous identifions cette nouvelle loi, appelée loi  $n^o$  2, sur les mêmes essais non-proportionnels que ceux utilisés pour identifier la loi  $n^o$  1 (où  $\underline{m}_2 = \underline{S}_u$ ), à savoir un



essai de surécrouissage et quatre essais de rochet biaxial.

*A priori* seuls les coefficients  $C_\phi$  et  $m_\phi$  de l'équation (B.4) sont à réidentifier par rapport à la première version du modèle, mais en fait, le niveau de contrainte obtenu lors de l'essai de surécrouissage dépend du vecteur choisi pour la loi d'évolution de la rotation du repère mobile<sup>1</sup>. Aussi, nous avons également réidentifié le coefficient  $a_n$  qui gère la valeur de l'écrouissage isotrope lors de trajets non-proportionnels. Les nouvelles valeurs des coefficients réidentifiés sont reportées dans le tableau B.1.

Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$a_n$	64000 MPa	$C_\phi$	1204	$m_\phi$	1

TAB. B.1 – Coefficients réidentifiés de la nouvelle loi de rotation du repère mobile, pour la version 5D du modèle à distorsion

On remarque que les valeurs des coefficients sont assez différentes de celles identifiées dans la loi  $n^o$  1 -  $a_n = 80000$  MPa,  $C_\phi = 20180$  et  $m_\phi = 2,89$  - et notamment que l'exposant  $m_\phi$  vaut ici 1, ce qui revient à dire que ce coefficient est devenu inutile dans la nouvelle loi. En fait, cela peut s'expliquer en observant la figure B.2 où l'on compare une surface seuil du modèle à distorsion avec une surface seuil du modèle polycristallin présenté dans le premier chapitre, à la fin d'un trajet de rochet 2D (voir partie (3.3.4))<sup>2</sup>. Pour limiter la déformation progressive, il faut d'une part que le repère mobile s'oriente de telle sorte que l'axe  $\hat{\omega}_1$  soit le plus proche possible de la direction de cisaillement  $S_2$ , et d'autre part que le premier cercle de construction du modèle à distorsion (de centre  $O_{(1)}$ ) s'écarte de cet axe ( $d_{(1)2} \neq 0$ ). Ainsi, si l'on choisit la normale au domaine d'élasticité  $\underline{n}_F$  comme vecteur pour faire tourner le repère mobile, on pourra identifier la loi d'évolution de la rotation du repère mobile de telle sorte que celui-ci tourne tant que l'axe  $\hat{\omega}_1$  n'est pas aligné avec  $\underline{n}_F$ . Par contre, si l'on choisit le vecteur position  $\hat{\underline{S}}$  pour faire tourner le repère mobile, alors on devra identifier la même loi d'évolution de telle sorte que le repère mobile arrête cette fois-ci de tourner avant d'être aligné avec  $\hat{\underline{S}}$ , d'où le besoin d'un exposant  $m_\phi$ . Cet exposant, s'il est supérieur à 1, permet en effet de diminuer le résultat de l'opération  $X^{m_\phi}$ .

Les résultats d'identification obtenus avec la loi  $n^o$  2 sont reportés sur les figures B.3 et B.4. Ils sont en accord avec les résultats expérimentaux, tout comme l'étaient d'ailleurs ceux de la loi  $n^o$  1.

Enfin, l'essai "papillon" de validation de la loi  $n^o$  2 est reporté sur la figure B.5. Il est jugé satisfaisant.

1. Le choix d'un vecteur particulier entraîne une modification de l'écoulement plastique au cours du cycle de surécrouissage, ce qui modifie la valeur de l'indicateur de non-proportionnalité  $A$  du modèle de Tanaka [Tanaka 94] (voir partie 3.3.5.2) et par voie de conséquence le niveau d'écrouissage isotrope à la fin de la simulation.

2. Il s'agit juste d'illustrer notre propos, la version 5D du modèle à distorsion n'ayant pas été identifiée avec le modèle polycristallin.

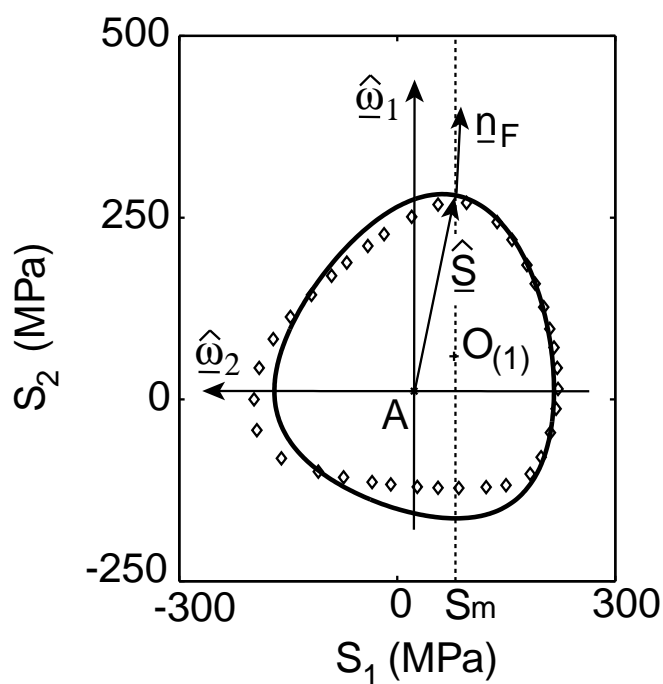


FIG. B.2 – Explication de l'utilité de l'exposant  $m_\phi$  lorsque l'on choisit le vecteur  $\underline{\hat{S}}$  pour faire tourner le repère mobile

À ce stade, on peut donc conclure qu'il y a peu de différences entre les deux versions proposées pour la loi d'évolution de la rotation du repère mobile. Ces deux versions donnent des résultats satisfaisants sur la base d'essais retenue.

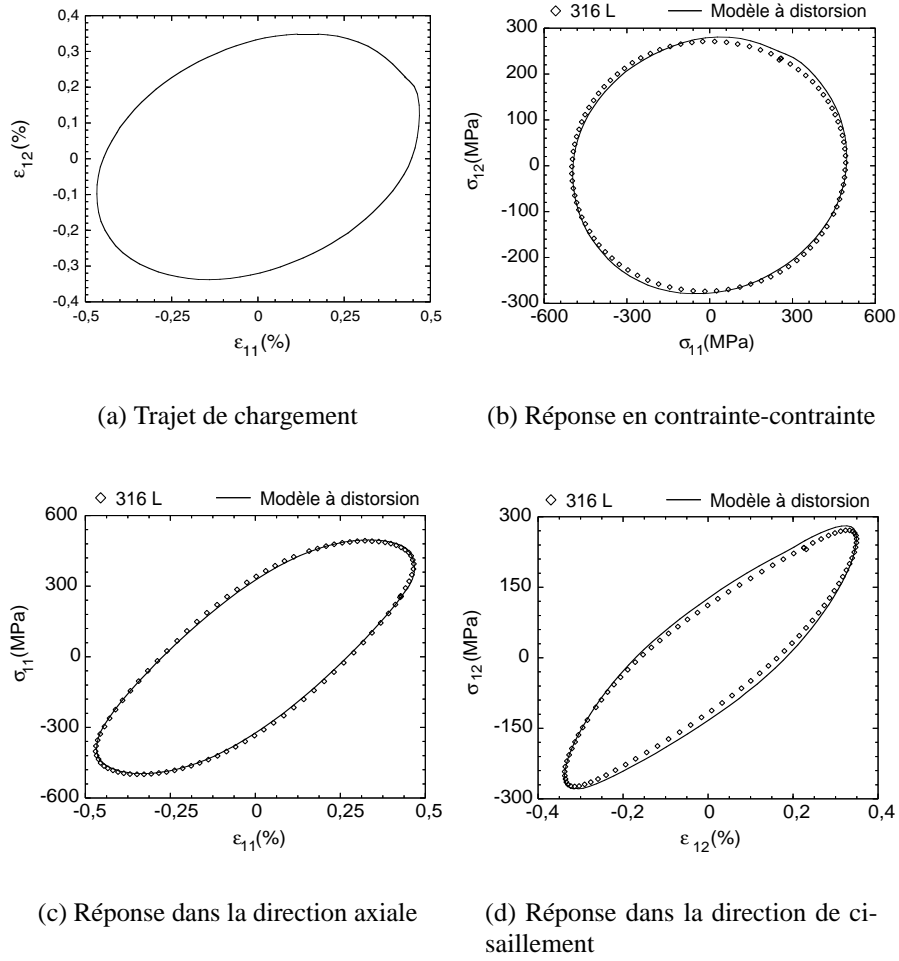


FIG. B.3 – Identification de la loi d'évolution n° 2 de la rotation du repère mobile sur un essai de surécrouissage réalisé sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L

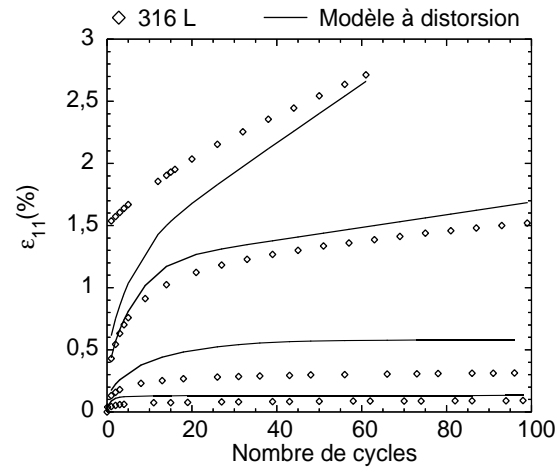


FIG. B.4 – Identification de la loi d'évolution n° 2 de la rotation du repère mobile sur des essais de rochet biaxial réalisés sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L,  $\sigma_{11} = 80 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_{12} = \pm 0,1\%$  ;  $\pm 0,2\%$  ;  $\pm 0,5\%$  ;  $\pm 0,75\%$

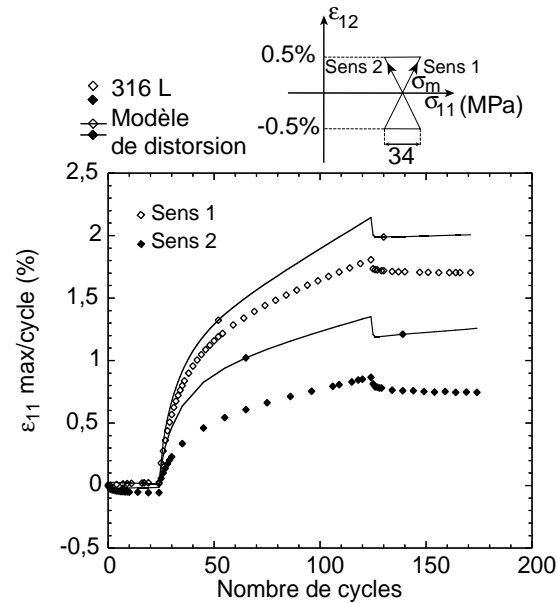


FIG. B.5 – Validation de la loi d'évolution n° 2 de la rotation du repère mobile sur un essai papillon réalisé sur un acier inoxydable COTHAA de type 316L

## **Annexe C**

**Article accepté dans la revue Journal  
of Engineering Materials and  
Technology**



Ludovic Vincent<sup>1</sup>

Sylvain Calloch

LMT-Cachan,  
ENS de Cachan/UMR CNRS 8535/Université  
Paris 6,  
61, avenue du Président Wilson,  
F-94235 Cachan Cedex, France

Tadeusz Kurtyka

CERN,  
EST/ME,  
CH-1211 Geneva 23, Switzerland

Didier Marquis

IFMA,  
Campus des Cézeaux-BP 265  
F-63175 Aubière Cedex, France

# An Improvement of Multiaxial Ratchetting Modeling Via Yield Surface Distortion

*Many theoretical studies have been made to describe multiaxial ratchetting and most of them have been concentrated on the location of the yield domain, not on its shape. In this paper, we introduce nonlinear kinematic constitutive equations (Ohno, N., and Wang, J. D., 1993, "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic recovery: Part I: Formulation and Basic Features for Ratchetting Behavior," International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp. 355–390. Ohno, N., and Wang, J. D., "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery: Part II: Application to Experiments of Ratchetting Behavior," International Journal of Plasticity, Vol. 9, pp. 391–403.) consistent with ratchetting modeling into the distortional model of subsequent yield surfaces proposed by Kurtyka, T., and Yczkowski, M., 1985, "A Geometric Description of Distortional Plastic Hardening of Devisioric Materials," Archives of Mechanics, Vol. 37, Nos. 4–5, pp. 383–395. Kurtyka, T., and Yczkowski, M., 1996, "Evolution Equation for Distortional Plastic Hardening," International Journal of Plasticity, Vol. 12, No. 2, pp. 191–213. We use an efficient polycrystalline model to simulate complex tests including yield surface detections in order to get some reference predictions to use in the development of the constitutive laws introduced into the distortional model. The distortional model is thus qualitatively identified with the polycrystalline model and then quantitatively identified with the experimental results on a type 316L stainless steel. It gives promising results.*

[DOI: 10.1115/1.1494450]

## I Introduction

If a metal or alloy specimen is subjected to repeated cycles of loading under stress control where the maximum stress exceeds initial yield and in the presence of a mean stress, the metal settles down to a very slow growth of strain per cycle—typically of the order  $10^{-5}$  to  $10^{-8}$  strain per cycle—and this is material ratchetting. In many circumstances, material damage, either in the form of continuum damage or fatigue crack initiation, is predominant before this gradual material ratchetting becomes significant but there are circumstances when the opposite happens.

For example, in rolling contact problems (e.g., railway lines) the high compressive hydrostatic stress retards crack initiation and the ratchet strain can become extremely large over many cycles [1]. This is the explanation for the gross distortion that can occur in railway lines on curves and is also accompanied by wear which also retards crack initiation by wearing away potential initiation sites. Recently, several papers have been devoted to such an issue simulating sliding contact loadings with different models to represent Ratchetting and Low Cycle Fatigue crack initiation [2,3]. Another example, recently reported in the literature [4,5], is related to Metal Matrix Composites where aluminum is the matrix material and alumina fibers are the reinforcements, particularly under cyclic thermal loadings. Due to significant differences in thermal expansion coefficients, upon thermal cycling and when a small stress is applied, the material ratchets. Obviously, there are other engineering applications where structures can be subjected to cyclic loads in the inelastic domain which can create a cumulative inelastic strain. In all cases, good prediction of strain accumulation depends on the capacity of the constitutive equations used in the analysis to reproduce the material behavior.

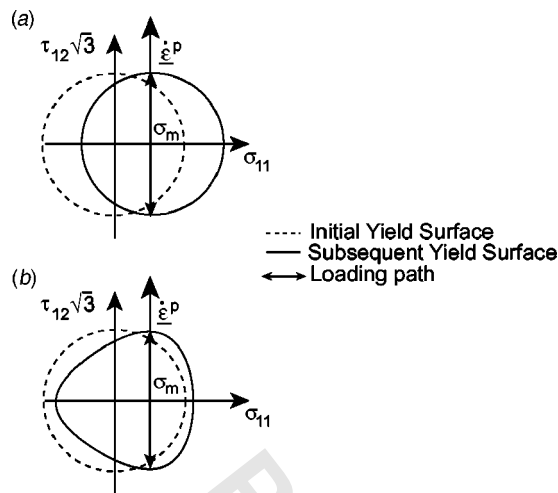
Ratchetting is an aspect of the mechanical behavior of metals and alloys that has received considerable attention over the last twenty years. It has led to the development of a significant number of cyclic plasticity models. In addition, several types of ratchetting tests have been performed and developed to elaborate these models. Today, one can say that exhaustive experimental investigations on the ratchetting behavior of polycrystalline metals are reported in the literature [1,6–32]. Many effects have been studied under uniaxial and multiaxial loadings and over a large temperature range. In particular, the effects of stress amplitude, mean stress, temperature, and stress path shape have been investigated. Moreover, the influence of ratchetting on dislocation substructures has been recently studied by Bocher et al. [32] and Gaudin and Feaugas [33].

In parallel, constitutive relations for ratchetting have been developed following two different approaches. The first one is the phenomenological approach which leads, only, to a description of the mechanical behavior at the macroscopic level. It is based on a yield domain in the stress space, generally defined by the von Mises' criterion, a normality rule for inelastic flow and a set of internal variables with evolution laws. The second approach is based on a micromechanical framework applied to the cyclic behavior of polycrystalline metals [34]. Here, the macroscopic stress and strain of the representative elementary volume are not directly related. The constitutive equations are defined on a microscale and a localization process is therefore needed to determine the local stress state. This localization stage is a two-step process which gives first the homogeneous local stress in each grain and second the resolved shear stress on each slip system. Then, the integration of the constitutive equations allows us to obtain the local slip rate on each slip system. These local slip rates are then summed among all the slip systems of every grain to give the macroscopic plastic strain rate.

One can summarize the advantages and disadvantages of the two approaches by the following general remarks. First, the models produced in the macroscopic approach are generally easy to use and enable quick computations but, on the other hand, are

<sup>1</sup>To whom correspondence should be addressed. Fax: +33 1 47 40 22 40, E-mail: vincent@lmt.ens-cachan.fr

Contributed by the Materials Division for publication in the JOURNAL OF ENGINEERING MATERIALS AND TECHNOLOGY. Manuscript received by the Materials Division June 5, 2001; revised manuscript received April 2, 2002. Associate Editor: E. Basso.



**Fig. 1 Comparison between the locations of a von Mises yield surface (a) and a distorted yield surface, (b) to obtain the same plastic flow direction, after a typical 2D ratchetting loading path**

often limited from a predictive point of view only to the loadings used in the identification procedure [26,31]. Concerning the micromechanical approach, it is much more predictive but a large number of internal variables is introduced, up to one hundred times the number of a macroscopic model. That is the reason why micromechanical models still remain difficult to use in structural engineering applications.

The purpose of the present work is to improve the description of multiaxial ratchetting with a phenomenological model. Up to now, most of the macroscopic models designed for ratchetting have been based on kinematic-type hardening rules and were successful for uniaxial ratchetting [10,35]. The multiaxial response of such models, however, always overestimates the experimental plastic strain accumulation unless corrective terms are introduced to reduce the dynamic recovery of back-stress variables for non-proportional loading paths [27,35,36]. Even with such sophisticated constitutive laws, the predictions are not always in good agreement with experimental results on both uniaxial and multiaxial ratchetting tests, as demonstrated in [26,31]. Besides, Delobelle et al. [21] argue that “the nature of the modifications to introduce in the kinematic hardening variables depends on the type of ratchet to be modeled. For uniaxial loadings, the progressive strain is governed by average stress effects, whereas for multiaxial loadings it is essentially governed by directional flow effects.” Therefore, the relative failure of the phenomenological models may reside in the hypothesis that the plastic strain rate is normal to a yield surface which form does not change throughout the loading history [26,31,37]. Indeed, with such an hypothesis, the direction of the plastic strain rate is directly connected with the position of the yield surface, hence the complex constitutive equations required for the back-stress variables. On the other hand, many experimental investigations show that the shape of the yield domain is significantly affected by the plastic flow [38–46]. A common conclusion is that there is a remarkable distortion of subsequent yield surfaces during plastic flow, connected with increase of their curvature in the vicinity of the loading point and flattening on the opposite direction. Thus, during plastic deformation, the normal to the experimental yield surface is different from the one predicted by an analysis based on a von Mises idealized yield domain centered approximately at the same position as the experimental surface. Likewise, if we imagine a well-known 2D ratchetting loading path with constant axial stress and cyclic shear strain (Fig. 1), the locations of a von Mises yield surface and a distorted yield surface (following the above remarks) are obvi-

ously not identical to obtain the same direction of plastic flow (i.e., accommodation of axial ratchetting in the present case).

So, we propose in this work to take into account the distortion of the yield surface in a phenomenological model. The distortional model proposed by Kurtyka and Zyczkowski [47,48], complemented by a set of evolution laws for internal variables designed for ratchetting is used. In order to show that the introduction of the description of the yield surface distortion is an interesting way to explore, an ad hoc strategy is used. This strategy is based on a synergy between a micromechanical model, developed by Caillaud [34] and Pilvin [49,50], and the phenomenological model. The polycrystalline (or micromechanical) model used has been designed for multiaxial cyclic plasticity of fcc alloys. It correctly describes complex shape changes of the yield surface [34], stress-strain behaviors under strain controlled loadings [34] and ratchetting under uniaxial and multiaxial loadings [50]. In the present paper, the micromechanical model is used like a “virtual testing machine” to build a complete “experimental database” to identify and develop the phenomenological model.

The present paper consists of three main sections. In the first one, we present the theory chosen to represent the distortion of the subsequent yield surfaces and the set of evolution laws of the internal variables in the case of uniaxial and biaxial loadings. In the second section, the phenomenological model is identified using the micromechanical model. Then, as the comparison between the polycrystalline and the phenomenological models gives promising results, in the last section, the distortional model is identified and validated using a large experimental database obtained from tension-compression and tension-torsion tests performed with a 316 austenitic stainless steel. The promising results are confirmed and analyzed.

## II Presentation of the Distortional Model

**II.1 Description of the Yield Surface.** We use the framework proposed by Kurtyka and Zyczkowski [47,48]. This model is able to represent complex shapes of surfaces and each internal variable has clear geometrical meaning which facilitates the identification of its evolution law. We restrain the use of this model to two-dimensional (2D) loading paths for simplicity of constitutive equations. An extension to a general load case described in 5 dimensions (5D) in deviatoric stress space is under investigation.

We consider subsequent transformations of the initial yield surface in the form of a circle in a 2D deviatoric stress space. In such a space, every tensor is expressed as a two-dimensional vector, hence the notation  $S_i$  with  $i=1,2$  for the stress deviator. A corresponding 2D plastic strain space is also used, with  $\varepsilon_i^p$  the plastic strain vector. The geometric procedure is shown in Fig. 2. Kurtyka and Zyczkowski have introduced a moving coordinate system  $(A, \hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$  translated via the variable  $X$  and rotated via the variable  $\phi$  with respect to the original coordinate system  $(O, \omega_1, \omega_2)$ . Two circles  $(O_{(1)}, R_{(1)})$  and  $(O_{(2)}, R_{(2)})$  are then considered in this moving coordinate system. They are located with the variables  $d_{(i)j}$ , with  $i$  the circle number and  $j$  the axis number. A half-line called “projecting radius,” starting from  $A$  and inclined relative to the  $(A, \hat{\omega}_1)$  axis with the angle  $\beta$ , crosses the first circle on  $M_1$  and the second one on  $M_2$ . A third point  $M_3$  is constructed with the abscissa of  $M_1$  and the ordinate of  $M_2$  in the moving coordinate system. Then, the entire yield surface is generated for  $\beta$  going from 0 to  $2\pi$ .

Kurtyka and Zyczkowski define the “active stresses”  $\hat{S}_i$  (with  $i=1,2$ ) as the coordinates of the loading point in the moving system, which are:

$$\hat{S}_i = Q_{ij}(S_j - X_j) \quad (1)$$

with  $S_j$  the coordinates of the loading point in the original coordinate system and  $Q_{ij}$  an orthogonal tensor that describes the rotation of the moving system. In the 2D space represented in Fig. 2, we can write:



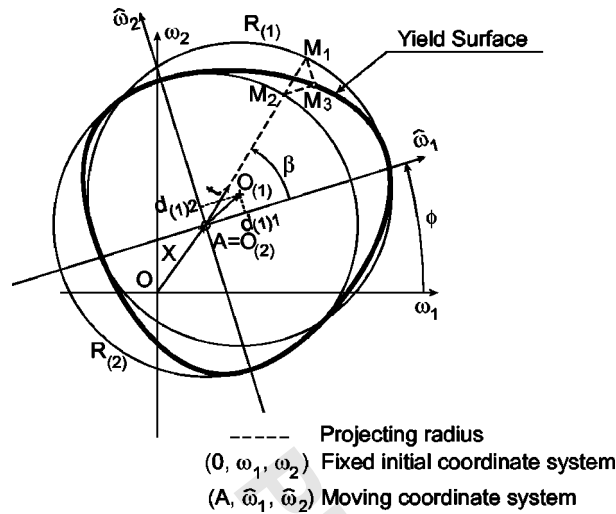


Fig. 2 Proposed description of yield surfaces

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2)$$

$X_j$  is the translation vector of the moving system, which can be interpreted as a back-stress variable.

The yield surface may then be described by a parametric equation:

$$\hat{S}_i = \sum_{k=1}^2 (d_{(i)k} t_k + [(d_{(i)k} t_k)^2 - d_{(i)k} d_{(i)k} + R_{(i)}^2]^{1/2}) t_i \quad i=1,2 \quad (3)$$

with  $t_k$ , the coordinates of the projecting radius versor, i.e.,  $t_1 = \cos \beta$  and  $t_2 = \sin \beta$ .

Kurtyka and Zyczkowski proposed a simplification of Eq. (3) where each circle could only translate on its corresponding moving axis, i.e.,  $d_{(i)j} = 0$  for  $i \neq j$  (see [47,48]). Such a case allows a relatively large description of all yield surface distortions observed in experiments. However, as demonstrated in [51], this proposal is not yet well adapted to the modeling of 2D ratchetting, and needs further development. In the present paper, we therefore assume another simplification of Eq. (3) where  $d_{(2)j} = 0 \forall j$ , which means that the second circle is locked on the center A of the moving coordinate system while the first circle is this time completely free in  $(A, \omega_1, \omega_2)$  (see an example in Fig. 2). The major drawback of the present definition is that the yield surface can be nonconvex depending on the values of  $d_{(1)i}$ . If we consider the parametric formulation in Eq. (3), we can define the radius of curvature of the yield “surface” (actually a curve in 2D space) as:

$$R = \frac{(\hat{S}'^2 + \hat{S}_2'^2)^{3/2}}{\hat{S}_1' \hat{S}_2'' - \hat{S}_2' \hat{S}_1''} \quad (4)$$

with  $\hat{S}'$  and  $\hat{S}''$  the first and second derivatives of  $\hat{S}$  with respect to the parameter  $\beta$ . The domain will be nonconvex when  $R$  is negative. We have therefore numerically calculated the sign of the denominator of  $R$  and obtained the limit of evolution of the variables  $d_{(1)i}$  in order to guarantee the convexity of the yield surface (see Fig. 3).

From Eq. (3), we can determine an implicit equation of the subsequent yield surface:

$$F = \hat{S}_1^2 - 2\hat{S}_1 t_1 (d_{(1)j} t_j) - t_1^2 (R_{(1)}^2 - d_{(1)j} d_{(1)j}) = 0 \quad j=1,2 \quad (5)$$

$$\text{with } t_2 = \frac{\hat{S}_2}{R_{(2)}} \text{ and } t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - t_2^2} \quad (6)$$

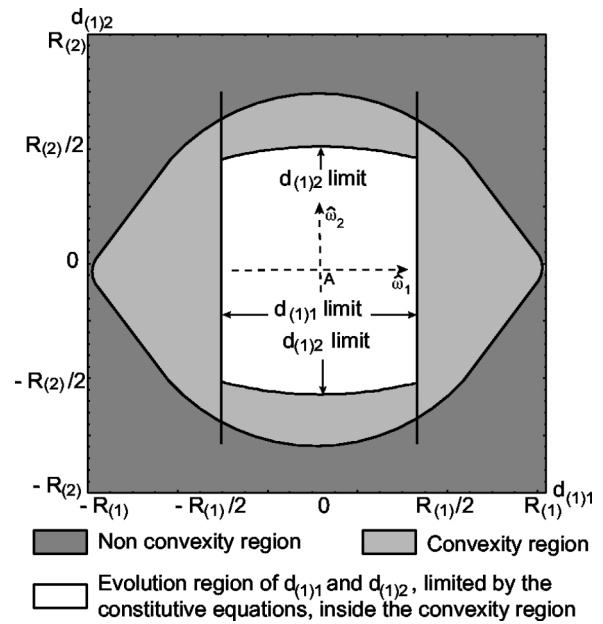


Fig. 3 Distortional variables' limits of evolution imposed by the constitutive equations to guarantee the convexity of the yield surface

Obviously, Eq. (5) is equivalent to the definition of the von Mises yield surface if the distortional parameters  $d_{(1)i}$  vanish and if the radii  $R_{(i)}$  are the same.

We can then determine the normal to the yield surface:<sup>2</sup>

$$n_i = \frac{\partial F}{\partial \hat{S}_j} \frac{\partial \hat{S}_j}{\partial S_i} = \frac{\partial F}{\partial S_j} Q_{ji} = \hat{n}_j Q_{ji} \quad i, j=1,2 \quad (7)$$

$$\text{with } \begin{cases} \hat{n}_1 = \frac{\partial F}{\partial \hat{S}_1} \\ \hat{n}_2 = \left[ \frac{\partial F}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial \hat{S}_2} + \frac{\partial F}{\partial t_2} \right] \frac{\partial t_2}{\partial \hat{S}_2} \end{cases} \quad (8)$$

This distortional model contains  $5 + 2n$  internal variables with  $n$  the number of back-stress vectors required to represent uniaxial ratchetting accurately [10]. These internal variables are the radii  $R_{(1)}$  and  $R_{(2)}$ , the kinematic back-stress variables  $X_{(n)i}$  with  $i=1,2$ , the distortion variables  $d_{(1)1}$  and  $d_{(1)2}$ , and the angle of rotation  $\phi$  of the moving system. In the next section, we propose constitutive equations consistent with multiaxial ratchetting modeling.

## II.2 Evolution Laws.

- Radii  $R_{(1)}$  and  $R_{(2)}$ .

The radius  $R_{(1)}$  is responsible for the size of the yield surface in the direction of uniaxial loadings and the other radius for the “cross size” of the yield surface. We propose:

$$\dot{R}_{(1)} = b(Q - R_{(1)})\dot{p} \text{ and } \dot{R}_{(2)} = (1 + \delta)\dot{R}_{(1)} \quad (9)$$

with  $\dot{p} = \sqrt{\dot{\epsilon}_i^p \dot{\epsilon}_i^p}$  the cumulated plastic strain rate and  $b$ ,  $Q$ , and  $\delta$  material parameters.  $R_{(1)}$  and  $R_{(2)}$  are both equal to the initial yield stress  $\sigma_Y$  before any plastic strain occurs.

- Back-stress variables  $X$ .

<sup>2</sup>  $\partial t_1 / \partial t_2$  is not defined for  $t_1 = 0$ , i.e., for  $\hat{S}_1 = 0$ . At these points, the yield surface is only determined by the second circle. Therefore, for  $t_1 = 0$ , the unit normal to the yield surface is  $\{\hat{n}_1 = 0, \hat{n}_2 = \text{sign}(\hat{S}_2)\}$ .

In order to model uniaxial ratchetting accurately, we use three different variables,  $\underline{X}_{(k)}$  ( $k=1,2,3$ ), to describe the total kinematic hardening of a material,  $\underline{X}$ :

$$\underline{X} = \sum_{k=1}^3 \underline{X}_{(k)} \quad \text{or} \quad X_i = \sum_{k=1}^3 X_{(k)i} \quad \text{with } i=1,2 \quad (10)$$

In a tension simulation, the first variable ( $k=1$ ) is responsible for the elastoplastic transient (high plastic modulus with quick saturation), the third one ( $k=3$ ) for the almost constant plastic modulus for “large” strains (2%) and the second one ( $k=2$ ) for the intermediate domain [10]. We use a modified version of the Armstrong-Frederick model [52]:

$$\dot{\underline{X}}_{(k)} = C_{(k)} \left( \dot{\varepsilon}^p - \gamma_{(k)} \varphi_{(k)}(p) \left( \frac{\|\underline{X}_{(k)}\|}{1/\gamma_{(k)} \varphi_{(k)}(p)} \right)^{m_{(k)}} \underline{X}_{(k)} \dot{p} \right) \quad k = 1,2,3 \quad (11)$$

with  $\varphi_{(k)}(p) = \varphi_{\infty(k)} + (1 - \varphi_{\infty(k)})e^{-\bar{\omega}p}$  in order to take into account cyclic hardening [53].  $C_{(k)}$ ,  $\gamma_{(k)}$ ,  $m_{(k)}$ ,  $\varphi_{\infty(k)}$ , and  $\omega$  are material parameters and  $\|\underline{X}_{(k)}\|$  is the norm of the vector  $\underline{X}_{(k)}$ . The term with exponent  $m_{(k)}$  comes from the modification of Ohno and Wang [35,54], to reduce the opening of the hysteresis loops in 1D ratchetting simulations (and hence to reduce the 1D ratchetting strain rate). Nevertheless, one may note that we have not put any directional correction in the dynamic recovery term since we use  $\dot{p}$  instead of  $\langle \dot{\varepsilon}^p : \underline{X}_{(k)} / \|\underline{X}_{(k)}\| \rangle$  in Ohno-Wang’s model and we choose to keep the exponent  $m_{(k)}$  constant (unlike Jiang-Sehitoglu’s model [27,28]).

- Distortional variables  $d_{(1)1}$  and  $d_{(1)2}$ .

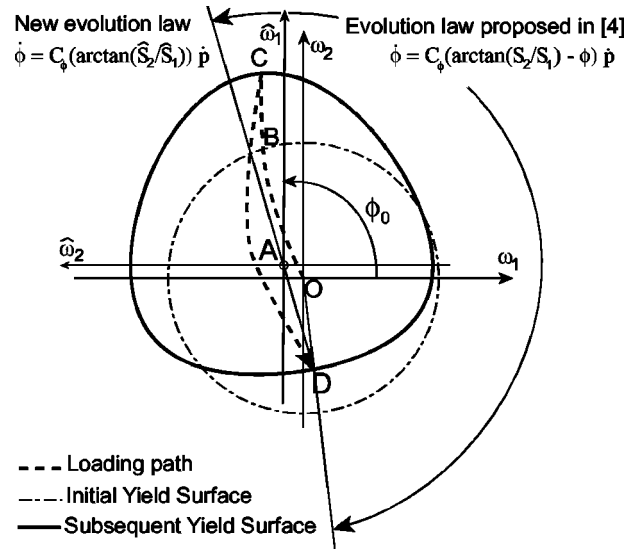
The distortional variables  $d_{(1)j}$  can be considered as back-stress variables. For instance, in a tension simulation, the center of the elastic domain is indeed located in  $X_1 + d_{(1)1}$ . Therefore, since this distortional model must at least describe accurately uniaxial ratchetting, it is convenient to attribute the same kind of constitutive equations to the distortional variables as for the back-stress variables  $\underline{X}_{(k)}$ . According to experimental observations [43], the distortion of the yield surface appears as soon as the material flows plastically (whatever the history of the material) but also saturates quite rapidly while the yield surface continues translating and/or growing. We have thus chosen to attribute the first back-stress evolution presented above ( $k=1$ ) to the distortional variables (reducing the number of “classical” back-stress variables  $\underline{X}_{(k)}$  to two). We propose the following constitutive laws:

$$\dot{d}_{(1)1} = C_{(1)1} \left( \dot{\varepsilon}_1^p - \gamma_{(1)1} \varphi_{(1)1}(p) \left( \frac{|d_{(1)1}|}{R_{(1)}/\gamma_{(1)1} \varphi_{(1)1}(p)} \right)^{m_{(1)1}} \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \dot{p} \right) \quad (12)$$

$$\dot{d}_{(1)2} = C_{(1)2} \left( \dot{\varepsilon}_2^p - \gamma_{(1)2} \left( \frac{|d_{(1)2}|}{(R_{(2)}/\gamma_{(1)2}) \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \right)^{m_{(1)2}} \times \frac{d_{(1)2}}{R_{(2)} \sqrt{1 - \left( \frac{d_{(1)1}}{R_{(1)}} \right)^2}} \dot{p} \right) \quad (13)$$

The distortional variables are the coordinates, in the moving coordinate system (Fig. 2), of the moving circle’s center. Therefore,  $\dot{d}_{(1)i}$  are driven by  $\dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\varepsilon}^p \cdot \hat{\omega}_i$ , the projection of the plastic flow on the moving axis  $\hat{\omega}_i$ , instead of  $\dot{\varepsilon}_i^p$  (see Fig. 2). The boundary value of  $d_{(1)1}$  is in relation to  $R_{(1)}$  for convenient reasons only since “ $|d_{(1)1}| < R_{(1)}$ ” is a necessary condition to have the yield surface defined [47]. The evolution of  $d_{(1)2}$  is coupled with the evolution of  $d_{(1)1}$  with the term  $\sqrt{1 - (d_{(1)1}/R_{(1)})^2}$ . This term has been introduced to guarantee the convexity of the yield surface (see Fig. 3).

- Rotation variable  $\phi$ .

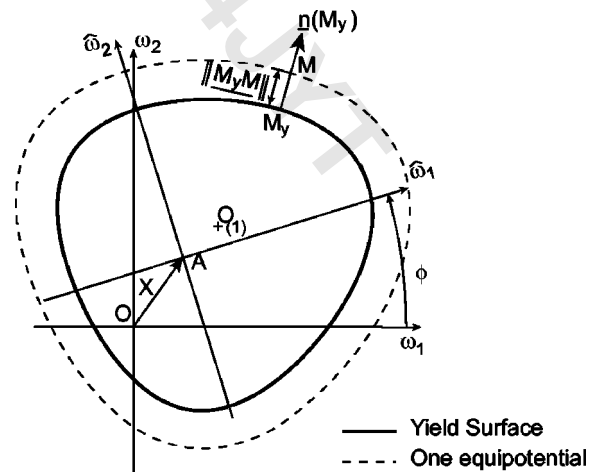


**Fig. 4** Rotation of the moving coordinate system. Comparison with the constitutive law proposed by Kurtyka and Zyczkowski [48].

For 2D loading paths, the rotation of the moving coordinate system is determined just by one variable—the angle  $\phi$  (Fig. 2). Kurtyka and Zyczkowski proposed in [48] the following constitutive equation:

$$\dot{\phi} = C_{\phi} \left( \arctan \left( \frac{S_2}{S_1} \right) - \phi \right) \dot{p} \quad (14)$$

with an initial value for  $\phi$  determined by the direction of the first yield point. This equation was based on experimental observations of yield surfaces obtained after a non-proportional loading path. Subsequent yield surfaces seem to turn with delay toward the current loading point located in this model with the coordinates  $(S_1, S_2)$  or  $(\hat{S}_1, \hat{S}_2)$ . Therefore, according to Eq. (14), the first moving axis, which gives the orientation of the distortion of the yield surface, would turn towards the loading point with a certain delay controlled by the material parameter  $C_{\phi}$ . However, this equation is no longer valid as soon as cyclic loading is considered. Indeed, if we imagine a classical sequence of plasticity-elasticity-plasticity, we have to be able to describe the yield surface rotation whatever the position of the last entry in plasticity. In this case, it is more convenient to use the coordinates in the moving system and we propose the following constitutive equation:



**Fig. 5** Definition of equipotentials in the context of a distorted yield surface

**Table 1** Description of the identification procedure of the material coefficients

Identification stages	Material coefficients	Identification tests
1	$S_0, C_{(1)1}, \gamma_{(1)1}, C_2, \gamma_2, C_3, \gamma_3, K, n$	Monotonic Tension Test with different strain rates and yield surface detections
2	$b, Q, \omega, \varphi_{(1)1\infty}, \varphi_{2\infty}, \varphi_{3\infty}$	1D Cyclic Hardening tests
3	$m_{(1)1}, m_2, m_3$	1D Ratchetting tests
4	$C_\phi, m_\phi, \delta, C_{(1)2}, \gamma_{(1)2}, m_{(1)2}$	2D Ratchetting tests with yield surface detections
5	all coefficients	all experiments

$$\dot{\phi} = C_\phi \arctan\left(\frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}\right) \dot{p} \quad (15)$$

This time, the angle  $\phi$  will turn until the component  $\hat{S}_2$  vanishes.

In Fig. 4, we have represented a possible loading path, with the corresponding evolutions of the variable  $\phi$  for the proposed evolution law and for the first proposition of Kurtyka and Zyczkowski [48]. The yield surface is obtained when the loading point is on  $C$ , with  $\phi = \phi_0$ , and the arrows for the evolution of  $\phi$  are plotted when the loading point goes in plasticity again from  $D$ . One can notice that the constitutive law is written so that the rotation is as low as possible whereas the first proposition in [48] would lead to a complete rotation of about 180 deg for the same loading path, which does not seem physically possible.

At last, in order to fit quantitatively experimental responses, we introduce a nonlinear evolution for  $\phi$  with the exponent  $m_\phi$ :

$$\dot{\phi} = C_\phi \text{sign}\left(\arctan\left(\frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}\right)\right) \left|\arctan\left(\frac{\hat{S}_2}{\hat{S}_1}\right)\right|^{m_\phi} \dot{p} \quad (16)$$

Provided  $m_\phi$  is larger than 1, the evolution of  $\phi$  will decrease sufficiently even for nonzero values of  $\hat{S}_2$ .

**II.3 Viscoplastic Formulation.** The model is written in a viscoplastic formulation in order to be able to represent rate dependant behaviors. Classically, the equipotentials of viscoplastic strain rate are assumed to be concentric with the von Mises yield surface defined by the following equation:

$$F_{Mises} = \sqrt{(S_i - X_i)(S_i - X_i)} - R = 0 \quad (17)$$

where  $X_i$  is the kinematic hardening and  $R$  the size of the yield domain.

The total viscoplastic strain rate is then obtained with:

$$\dot{p} = \left\langle \frac{F_{Mises}}{K} \right\rangle^n \quad (18)$$

where  $K$  and  $n$  are two material coefficients and  $\langle \cdot \rangle$  the McCauley brackets, i.e.,  $\langle u \rangle = u$  if  $u \geq 0$  and  $\langle u \rangle = 0$  if  $u < 0$ . Equation (18) means that the viscoplastic strain rate is a growing function of the radius of the equipotentials. Unfortunately, when the yield surface is no longer circular, it is much more difficult to define its center. Moreover, to the authors' knowledge, there is no experimental evidence of the shape of the equipotentials after any prestrain. We have thus made the hypothesis that the equipotentials are defined according to Fig. 5 where it is the distance between the current loading point  $M$  and the closest point of the yield surface  $M_y$  that is chosen to compute the viscoplastic strain rate:

$$\dot{p} = \left( \frac{\|M_y M\|}{K} \right)^n \quad \text{if } M \text{ is outside the yield surface}^3 \quad (19)$$

with  $\|M_y M\|$  the norm of the vector  $\underline{M_y M}$ , and,  $K$  and  $n$  two material coefficients.

<sup>3</sup> $M$  is outside the yield surface if  $|\hat{S}_2| > R_{(2)}$  or if  $F > 0$  (defined in Eq. (5)). These two cases have to be checked successively since there is  $t_1 = \text{sign}(\hat{S}_1) \sqrt{1 - (\hat{S}_2/R_{(2)})^2}$  in Eq. (5) that is not defined for  $|\hat{S}_2| > R_{(2)}$ .

The main inconvenient of this viscoplastic formulation is that a numerical search of  $M_y$  is necessary since we have not found an analytical solution to the problem:

$$\begin{cases} M_y \in F \\ \text{and} \\ n(M_y) = \alpha \underline{M_y M} \quad \alpha > 0 \end{cases} \quad (20)$$

with  $n(M_y)$  the normal to the yield surface in  $M_y$ . So, we minimize the norm of the vectorial product  $\|\underline{M_y M} \wedge n(M_y)\|$  by a Newton routine. This minimization is, however, very quick since we can propose a starting point close to  $M_y$  with Eq. (5) and Eq. (6). Finally, it is worth pointing out that, unlike the definition in Eq. (18), we cannot define a viscoplastic strain rate directly with the function  $F > 0$  defined in Eq. (5) since  $t_1$  (Eq. (6)) is not defined for  $|\hat{S}_2| > R_{(2)}$ .

For uniaxial loadings with rate independent plasticity, there is equivalence (in  $(\sigma, \epsilon)$  loops predictions) between the present distortional model and a model with a von Mises yield surface and a kinematic back stress variable instead of the distortional variable  $d_{(1)1}$ .

The distortional model contains 26 material coefficients including the elastic ones (Young modulus  $E$  and Poisson coefficient,  $\nu$ ) which is quite usual as soon as ratchetting has to be modeled accurately. The identification procedure proposed in Table 1, is based on five stages. The first one concerns the determining of the set of parameters  $S_0, C_{(1)1}, \gamma_{(1)1}, C_2, \gamma_2, C_3, \gamma_3, K$ , and  $n$ . These parameters can be estimated with a monotonic tension test with different strain rates and yield surface detections. The set of parameters  $b, Q, \omega, \varphi_{(1)1\infty}, \varphi_{2\infty}$ , and  $\varphi_{3\infty}$  are identified in the second stage. Classical uniaxial cyclic hardening tests are sufficient. The parameters  $m_{(1)1}, m_2, m_3$  are then identified with a set of uniaxial ratchetting tests. Finally, the parameters  $C_\phi, m_\phi, \delta, C_{(1)2}, \gamma_{(1)2}$ , and  $m_{(1)2}$  are identified with a set of biaxial ratchetting tests with yield surface detections. Obviously all these parameters are not really independent and a change of their value can affect almost all the simulations of the previous four stages. Therefore, this procedure is only used to give a consistent set of initial values for a complete identification made with all the experiments (stage 5 in Table 1). This strategy will be used in Sections 3 and 4 using the software Sidolo [55].

### III Identification of the Distortional Model With a Poly-crystalline Model [34,49]

Among the necessary tests for an efficient identification of the model, some, such as the yield surface detections, are long and difficult to carry out. On the other hand, the polycrystalline model developed by Cailletaud [34] and Pilvin [49] is very predictive and gives yield surface distortion "naturally."

Therefore, we have decided to use this polycrystalline model as a "virtual testing machine" to qualitatively identify the distortional model.

### III.1 Constitutive Equations of the Polycrystalline Model.

#### 1 Localization.

$$\underline{\underline{\sigma}}^g \underline{\underline{\Sigma}} + \frac{2(7-5\nu)}{15(1-\nu)} \mu [\underline{\underline{B}} - \underline{\underline{\beta}}^g] \quad \text{with} \quad \underline{\underline{B}} = \sum_{g \in G} f_g \underline{\underline{\beta}}^g \quad (21)$$

The stress  $\underline{\underline{\sigma}}^g$  in the “grain”  $g$  is equal to the macro stress  $\underline{\underline{\Sigma}}$  plus a corrective term responsible for the intergranular hardening.  $\mu$  is the Coulomb’s modulus,  $f_g$  the volume fraction of the grain  $g$  in the aggregate  $G$  and  $\underline{\underline{\beta}}^g$  a specific internal variable for each phase following the evolution law:

$$\dot{\underline{\underline{\beta}}}^g = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \Delta(\underline{\underline{\beta}}^g - \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^p) \|\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p\| \quad (22)$$

2 *Micro Evolution Laws.* For each grain  $g$ , the following equations are solved for each active slip system  $S$ .

$$F_s = |\tau_s - X_s| - \tau_0 - R_s + \frac{D}{2C} X_s^2 \quad (23)$$

with  $\tau_s$  the projection of  $\underline{\underline{\sigma}}^g$  on the slip system  $S$ ,  $X_s$ , and  $R_s$  the kinematic and isotropic hardening variables of the slip system, respectively.  $\tau_0$  (slip systems’ yield stress),  $D$  and  $C$  are material parameters.

$$\dot{\Gamma}_s = \left\langle \frac{F_s}{K} \right\rangle^N \text{sign}(\tau_s - X_s) \quad (24)$$

$$\dot{X}_s = C(\dot{\Gamma}_s - D X_s |\dot{\Gamma}_s|) \quad (25)$$

$$R_s = Q \sum_{r \in S} H_{rs} q_r \quad \text{with} \quad \dot{q}_s = |\dot{\Gamma}_s| (1 - B q_s) \quad (26)$$

with  $\Gamma_s$  the plastic shear strain on the slip system  $S$ . The interaction matrix  $H_{rs}$  reflects the interaction between the different slip systems. Usually, this matrix is constituted of 1 material parameter,  $H_{ii}=1$  and  $H_{ij}=H$  for  $i \neq j$  but in the version of the model proposed by Pilvin and Geyer [50], a third parameter is suggested to take into account the strong influence of the Lomer locks.

3 *Homogeneization.* Finally, the macro plastic strains  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  are simply the sum of the micro plastic strains:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sum_{s \in S} \underline{\underline{m}}_s \Gamma_s \quad \text{with} \quad \underline{\underline{m}}_s = \frac{1}{2} [\underline{\underline{n}}_s \otimes \underline{\underline{l}}_s + \underline{\underline{l}}_s \otimes \underline{\underline{n}}_s] \quad (27)$$

and then

**Table 2** Material coefficients identified with the polycrystalline model

Material coefficients	Value	Material coefficients	Value	Material coefficients	Value
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$\sigma_Y$	192 MPa
$C_2$	8000 MPa	$\gamma_2$	0,033	$m_2$	4
$C_3$	2420 MPa	$\gamma_3$	0,01	$m_3$	4
$C_{(1)1}$	70600 MPa	$\gamma_{(1)1}$	4,7	$m_{(1)1}$	0
$C_{(1)2}$	45000 MPa	$\gamma_{(1)2}$	1,85	$m_{(1)2}$	20
$b$	2,2	$Q$	239 MPa	$\omega$	10
$\varphi_{2\infty}$	0,3	$\varphi_{3\infty}$	1	$\varphi_{(1)1\infty}$	0,553
$C_\phi$	800	$m_\phi$	5,3	$\delta$	0
$n$	24	$K$	10		

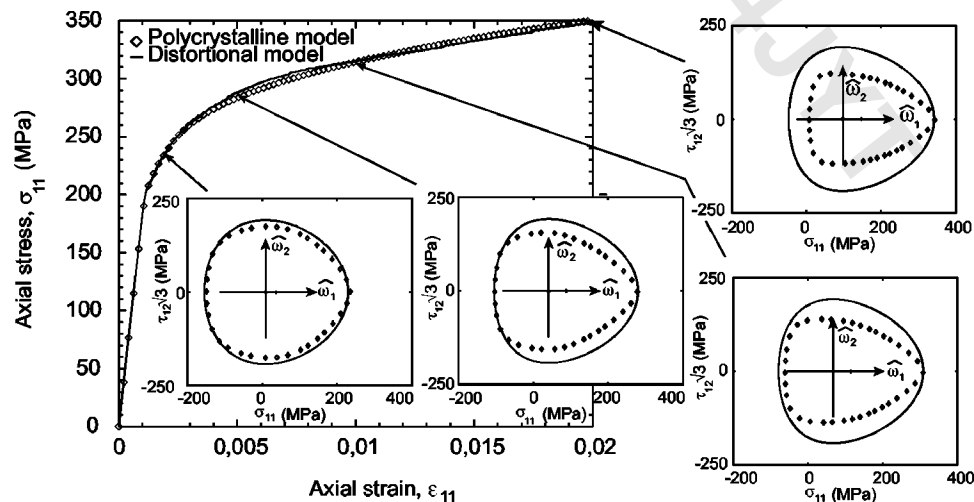
$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sum_{g \in G} f_g \underline{\underline{\varepsilon}}^g \quad (28)$$

with  $\underline{\underline{n}}_s$  the normal of the slip plane  $S$  and  $\underline{\underline{l}}_s$  the slip direction.

**III.2 Identification of the Distortional Model With the Polycrystalline Model.** The polycrystalline model had been identified by Pilvin and Geyer [50] on a SS316 SPH stainless steel. There identification tests included monotonic tension, uniaxial cyclic hardening and multiaxial ratchetting tests. For our purposes, we have used 1000 different orientations for the grains of the polycrystalline model, each of them containing 12 slip systems, in order to obtain smooth “yield surface.” This leads to 37000 internal variables. We have identified the material coefficients of the distortional model with the polycrystalline model using the software Sidolo [55]. These material coefficients are reported in Table 2.

As all the simulations were made at the same strain rate, the coefficients  $K$  and  $n$  are chosen to reproduce a rate independent behavior. We do not assume any cyclic hardening on the back-stress variable which has an almost linear evolution and therefore  $\varphi_{3\infty}$  is useless. In this configuration it can be noticed that the exponent  $m_{(1)1}$  is equal to 0 whereas both coefficients  $m_2$  and  $m_3$  of the back-stress variables are identical and equal to 4. Finally, the evolution of  $R_{(2)}$  is assumed equal to the one of  $R_{(1)}$  with reasonable accuracy, hence  $\delta=0$ .

From Fig. 6 to Fig. 11, the continuous line is the response of the distortional model whereas the symbols represent the response of the polycrystalline model. In Fig. 6 are plotted the results of a monotonic tension simulation with 4 yield surface detections. We can observe that the size of the polycrystalline “yield surface” is



**Fig. 6** Monotonic tension simulation



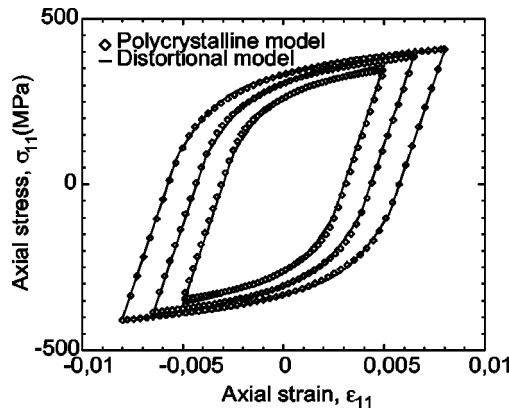


Fig. 7 Uniaxial cyclic hardening simulations with increasing strain amplitude

becoming smaller as the loads goes on. The constitutive equations introduced in the distortional model do not allow to reproduce this phenomenon but it should not be a major difficulty. However, as we are much more interested in cyclic loading phenomena, we have checked that this “yield surface reduction” was not present in any cyclic loading simulation. In Fig. 7, uniaxial cyclic hardening simulations with increasing strain amplitudes are represented and in Fig. 8 are shown three uniaxial ratchetting simulations with a constant stress amplitude but different mean stresses. The results are in good agreement with the response of the polycrystalline model as could be expected from the constitutive equations designed for ratchetting. Up to now, as we have already discussed before, one would obtain exactly the same results (except the shape of the yield surface) with another phenomenological model based on a von Mises yield surface and a back stress variable instead of the distortional variable  $d_{(1)1}$ , provided all the evolution laws and material parameters stay the same. A 2D ratchetting test, with constant axial stress and cyclic shear strain is then simulated with these two phenomenological models, and compared with the polycrystalline model in Fig. 9. It can be seen that the von Mises model:

- overestimates the ratchetting response
- does not represent well the yield surface distortion

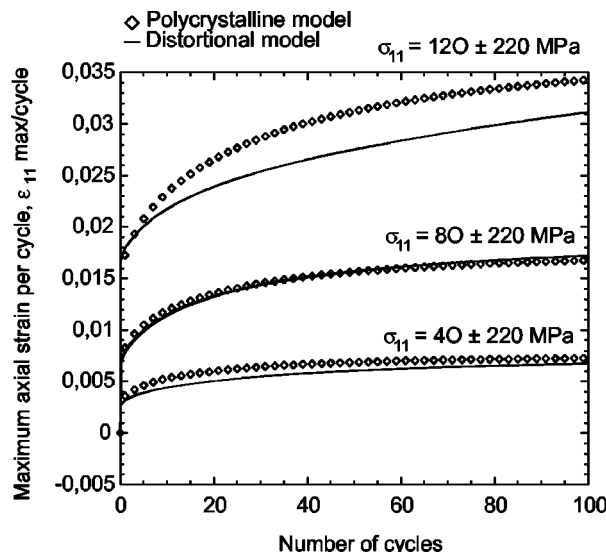


Fig. 8 Uniaxial ratchetting simulations. Influence of mean stress.

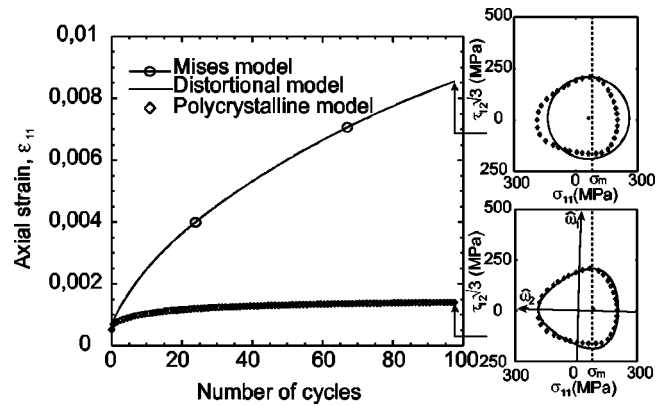


Fig. 9 2D Ratchetting simulation: comparison between polycrystalline, von Mises and distortional models.  $\sigma_{11} = 80$  MPa,  $\varepsilon_{12} = \pm 0.1\%$ .

— does not locate well the yield surface

all these three phenomena being well described by the distortional model. Obviously, one could improve the performance of the von Mises model in the 2D ratchetting prediction by introducing directional corrections like Ohno and Wang [35], Jiang and Sehitoglu [27,28] or Burlot and Cailletaud [36]. Yet, such modifications would not improve the description of the yield surface location. Actually, if we consider that the plastic strain rate is normal to a von Mises yield surface, the only solution to reduce the axial component of the plastic strain rate is to quickly translate this yield surface towards the axial direction so that the normal to the yield surface is only in the shear direction during the subsequent loading path. Therefore, the discrepancy between the locations of the von Mises yield surface and the polycrystalline yield surface would be even greater and might lead to larger errors under changes of the load direction. Other 2D ratchetting simulations are plotted on Fig. 10 illustrating the capacity of the distortional model to follow the polycrystalline model, in the ratchetting response and in the shape of the yield surfaces.

A validation test (i.e., a test that has not been used in the identification of the model) is then investigated. It consists in a “butterfly” 2D ratchetting test where the axial stress is no longer fixed but is also cycling [26]. As one can see in Fig. 11, there are two possible ways to describe the butterfly loading path, referred as

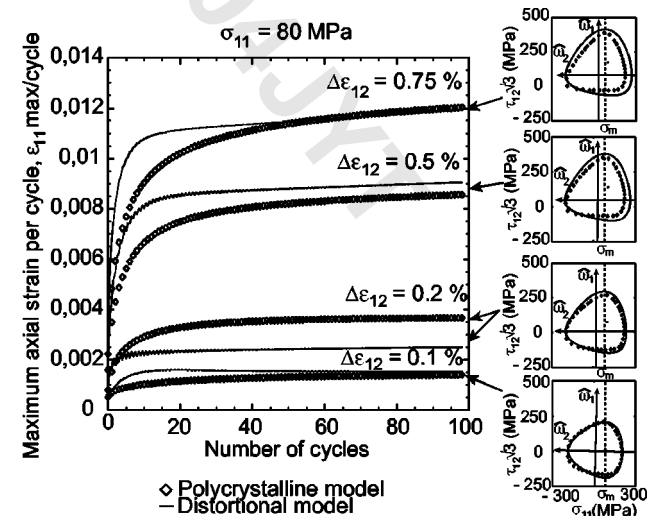


Fig. 10 2D Ratchetting simulations: influence of cyclic strain amplitude

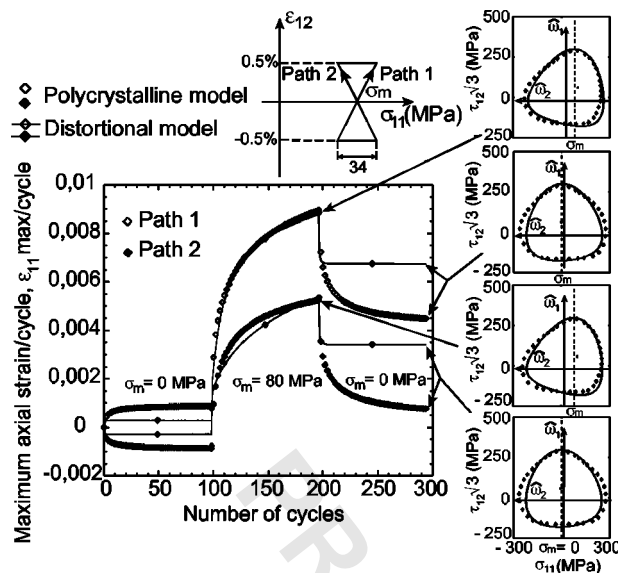


Fig. 11 Validation test: a “butterfly” simulation. Comparison between the polycrystalline and the distortional model.

Table 3 Chemical composition of type 316 L stainless steel (%wt)

C	Mn	S	P	Si	Cr	Ni	Mo	Co	Fe
0,018	1,62	0,002	0,024	0,35	16,7	11,08	2,13	0,2	balance

path 1 and path 2. These two paths are not equivalent since most of the plastic flow takes place at the end of the cross “diagonals” of the loading paths. The cyclic shear strain is kept constant while the mean axial stress is equal to 0 MPa then 80 MPa and 0 MPa once again. This test appeared to be a quite critical benchmark test for well-known phenomenological models [31]. The response of the polycrystalline and distortional models is plotted in Fig. 11 and we can be satisfied with the distortional response in axial strain accumulation as well as with the shape of the yield surfaces. It is worth noting that the reduction of the plastic strain over the last cycles where the mean axial stress is reduced to 0 MPa is lower for the distortional model than for the polycrystalline model. However, we will see in the next section that the real material behavior is closer to the distortional response.

As a conclusion, we can be satisfied with the description of:

- the  $(\sigma, \varepsilon)$  loops
- the ratchetting response
- the yield surface distortion and location

with respect to the polycrystalline model for a relatively large series of tests.

#### IV Identification of the Distortional Model With Experimental Results on a 316L Stainless Steel

The previous results were encouraging enough to identify the distortional model with the same kind of tests listed in Table 1 (except the yield surface detections) obtained on a 316L Stainless Steel [31]. The chemical composition of this material is given in Table 3.

The results are presented from Fig. 12 to Fig. 16 with the coefficients listed in Table 4.

All the experiments were made at the same strain rate in order to avoid effects coming from the rate dependent behavior of the material. The coefficients  $K$  and  $n$  are therefore chosen accord-

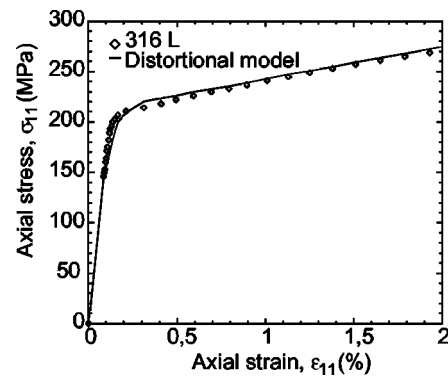


Fig. 12 Monotonic tension test. Comparison with 316L stainless-steel response.

ingly. The material does not present any isotropic hardening for the loading paths considered in this study. The coefficients  $b$  and  $Q$  are therefore useless. We do not suppose any cyclic hardening on the back-stress variable which has an almost linear evolution and therefore  $\varphi_{4\infty}$  is also useless. Finally, it is worth noting that the coefficients responsible for the transverse distortion of the yield surface and the rotation of the yield surface ( $C_{(1)2}$ ,  $\gamma_{(1)2}$ ,  $m_{(1)2}$ ,  $C_\phi$ , and  $m_\phi$ ) are the same as those taken in the identification with the polycrystalline model. It is too soon to conclude that these parameters may be considered as independent of the material behavior especially because the polycrystalline model was identified on another type 316 stainless steel. However, we do think that any identification on another material could begin with the above values of these coefficients as a good starting point.

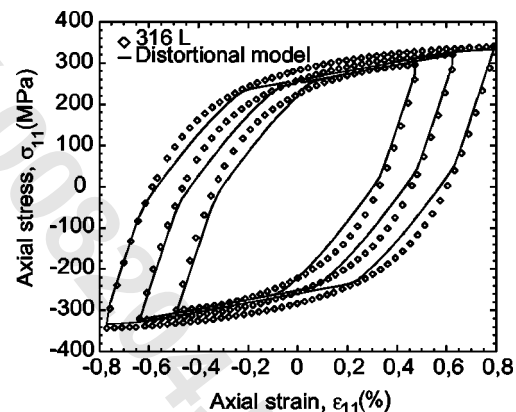


Fig. 13 Uniaxial cyclic hardening tests with increasing strain amplitudes

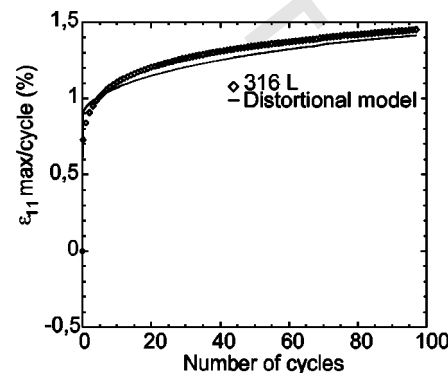


Fig. 14 Uniaxial ratchetting test with  $\sigma_{11} = 100 \pm 140$  MPa

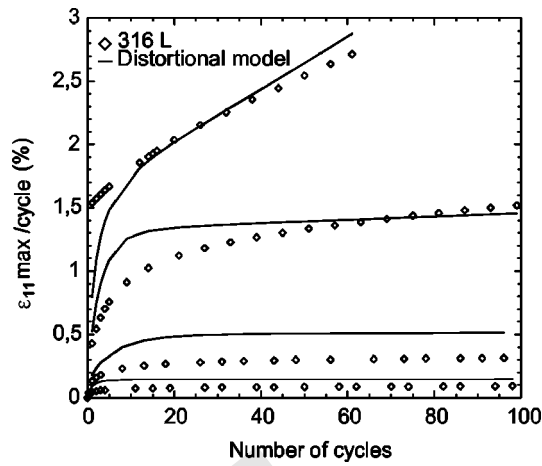


Fig. 15 2D Ratchetting tests: influence of cyclic strain amplitude

Here, it was necessary to introduce a third back-stress variable  $X$  to correctly describe all the test data. As a matter of fact, the stress amplitude  $\Delta\sigma = 440$  MPa applied in the uniaxial ratchetting test and the resulting plastic strain accumulation observed in Fig. 14 implies that the initial yield stress is lower than  $\Delta\sigma/2 = 220$  MPa. We have thus identified a maximum value of 130 MPa for the yield stress  $\sigma_Y$  to correctly describe this test. On the other hand, the apparent yield stress observed in the monotonic tension test in Fig. 12 is higher than 130 MPa, approximately 200 MPa. Therefore, we have used the distortional variable  $d_{(1)1}$  and the first back-stress variable  $X_{(1)}$  to describe the monotonic response from 130 MPa to 200 MPa. The constitutive equations of these variables thus contain very high moduli  $C_{(1)1}$  and  $C_2$ , respectively, that perturb the description of cyclic hardening tests presented in Fig. 13, hence the need for a new back-stress variable with respect to the model identified in the previous section. Finally, the experimental results for the 2D ratchetting tests in Fig. 15 were obtained from only one specimen with successive steps of

Table 4 Material coefficients identified at room temperature with the 316L stainless steel

Material coefficients	Value	Material coefficients	Value	Material coefficients	Value
$E$	180 GPa	$\nu$	0,315	$\sigma_Y$	130 MPa
$C_2$	42600 MPa	$\gamma_2$	0,0354	$m_2$	12,4
$C_3$	6050 MPa	$\gamma_3$	0,0756	$m_3$	17,2
$C_4$	1800 MPa	$\gamma_4$	0,00919	$m_4$	3,2
$C_{(1)1}$	45000 MPa	$\gamma_{(1)1}$	5	$m_{(1)1}$	1
$C_{(1)2}$	45000 MPa	$\gamma_{(1)2}$	1,85	$m_{(1)2}$	20
$b$	0	$Q$	130 MPa	$\omega$	10
$\varphi_{2\infty}$	0,436	$\varphi_{3\infty}$	0,331	$\varphi_{4\infty}$	1
$\varphi_{(1)1\infty}$	0,504	$C_\phi$	800	$m_\phi$	5,3
$\delta$	0	$n$	24	$K$	10

growing cyclic shear amplitudes but there is some experimental evidence that the history effect under such loading sequence can be neglected [56]. This allows us to identify the distortional model with these results, assuming that the material is in a virgin state before each new load step, hence the poor prediction of the model in the very first cycles.

Cyclic hardening and multiaxial ratchetting are not really independent from a modeling point of view. The only way to reproduce the apparent difference in ratchetting rate between the two 2D ratchetting tests where  $\Delta\varepsilon_{12}/2 = 0.5\%$  and  $\Delta\varepsilon_{12}/2 = 0.75\%$  (Fig. 15) was by introducing a change in the tangent hardening modulus, i.e. by saturating one back-stress variable for  $\Delta\varepsilon_{12}/2 = 0.75\%$  and not for  $\Delta\varepsilon_{12}/2 = 0.5\%$ . This has a direct impact on the cyclic hardening curves plotted in Fig. 13 that are not as good as one could obtain by neglecting multiaxial ratchetting or introducing another additional back-stress variables. It is worth noting that the authors wanted to limit the number of variables and coefficients to identify regardless of little discrepancies with some experimental results. A good argument in favor of this approach is the results of the same validation test as with the polycrystalline model, i.e., a butterfly test (Fig. 16). As noticed before, the response of the distortional model is in quite good agreement with the experimental results, whatever the value of the mean axial stress.

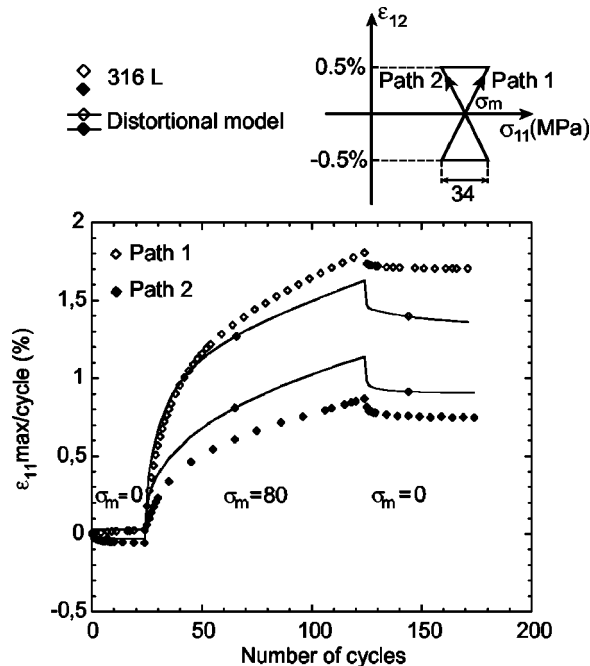


Fig. 16 Validation test: a "butterfly" test

## V Conclusion and Outlook

In this paper, yield surface distortion has been introduced into phenomenological models in order to improve quantitatively the description of plastic strain rate direction, as suggested by recent works [26,31,37]. We have used the framework proposed by Kurytka and Zyczkowski [47,48] into which we have introduced one of the most efficient constitutive equations to describe uniaxial ratchetting [1]. We have proposed complementary equations required for the "behavior" of the yield surface during non-proportional loading paths. The ability of the new model to describe a complex phenomenon like multiaxial ratchetting has been demonstrated. Furthermore, we have exposed a significant discrepancy between the shape and location of yield surfaces obtained by a von Mises model and a predictive polycrystalline model [34,50] whatever the efficiency of the constitutive laws. This difference, assuming that the yield surface detections made on the polycrystalline model are close to those of the material, may cause major errors in the determination of the yield point when the loading path is modified (Fig. 9). In structural computations including cyclic loadings, as the stress and strain field are a priori nonhomogeneous and may change from one cycle to another, it might be useful to correctly describe both the location and the shape of the yield surface. This assumption is under investigation for contact issues. The constitutive equations are therefore being adapted for any 5D loading path in the deviatoric space.

## Acknowledgments

The authors wish to thank Georges Cailletaud and Philippe Pilvin for the implementation of the polycrystalline model.

## References

- [1] Jiang, Y., and Sehitoglu, H., 1994, "Multiaxial Cyclic Ratchetting under Multiple Step Loading," *Int. J. Plast.*, **10**(8), pp. 849–870.
- [2] Ringsberg, J. W., 2000, "Cyclic Ratchetting and Failure of a Pearlitic Rail Steel," *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, **23**, pp. 747–758.
- [3] Ringsberg, J. W., Loo-Morey, M., Josefson, B. L., Kapoor, A., and Benon, J. H., 2000, "Prediction of Fatigue Crack Initiation for Rolling Contact Fatigue," *Int. J. Fatigue*, **22**, pp. 205–215.
- [4] Ponter, A. R. S., and Leckie, F. A., 1998, "Bounding Properties of Metal-Matrix Composites Subjected to Cyclic Thermal Loading," *J. Mech. Phys. Solids*, **46**(4), pp. 697–717.
- [5] Ponter, A. R. S., and Leckie, F. A., 1998, "On the Behavior of Metal Matrix Composites Subjected to Cyclic Thermal Loading," *J. Mech. Phys. Solids*, **46**(11), pp. 2183–2199.
- [6] Chaboche, J.-L., 1987, "Cyclic Plasticity Modeling and Ratchetting Effects," *Proc. of Constitutive Laws for Engineering Materials*, pp. 47–58.
- [7] Chaboche, J.-L., and Nouailhas, D., 1989, "Constitutive Modeling of Ratchetting Effects. Part I: Experimental Facts and Properties of Classical Models," *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, **111**, pp. 384–392.
- [8] Chaboche, J. L., and Nouailhas, D., 1989, "Constitutive Modeling of Ratchetting Effects. Part II: Possibilities of Some Additional Kinematic Rules," *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, **111**, pp. 409–416.
- [9] Ruggles, M. B., and Krempl, E., 1989, "The influence of the Test Temperature on the Ratchetting Behavior of Type 304 Stainless Steel," *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, **111**, pp. 378–383.
- [10] Chaboche, J. L., 1991, "On Some Modifications of Kinematic Hardening to Improve the Description of Ratchetting Effects," *Int. J. Plast.*, **7**, pp. 661–678.
- [11] Hassan, T., and Kyriakides, S., 1992, "Ratchetting in Cyclic Plasticity, Part I: Uniaxial Behavior," *Int. J. Plast.*, **8**, pp. 91–116.
- [12] Hassan, T., Corona, E., and Kyriakides, S., 1992, "Ratchetting in Cyclic Plasticity, Part II: Multiaxial Behavior," *Int. J. Plast.*, **8**, pp. 117–146.
- [13] Cabrilhat, M.-T., and Gatt, J.-M., 1993, "Evaluation of Thermal Ratchetting on Axisymmetrical Thin Shells at the Free Level of Sodium-Inelastic Response," *Proceedings of SMIRT 12*, E05/4.
- [14] Delobelle, P., 1993, "Synthesis of the Elastoviscoplastic Behavior and Modelization of an Austenitic Stainless Steel Over a Large Temperature Range, under Uniaxial and Biaxial Loadings, Part I: Behavior," *Int. J. Plast.*, **9**, pp. 65–85.
- [15] Delobelle, P., 1993, "Synthesis of the Elastoviscoplastic Behavior and Modelization of an Austenitic Stainless Steel Over a Large Temperature Range, under Uniaxial and Biaxial loadings, Part II: Phenomenological Modelization," *Int. J. Plast.*, **9**, pp. 87–118.
- [16] Delobelle, P., and Bocher, L., 1994, "Experimental Study and Phenomenological Modelization of Uni and Multidirectional Ratchet," *Proceedings, Fourth International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue*, pp. 255–268.
- [17] Hassan, T., and Kyriakides, S., 1994, "Ratchetting of Cyclically Hardening and Softening Materials: I. Uniaxial Behavior," *Int. J. Plast.*, **10**(2), pp. 149–184.
- [18] Hassan, T., and Kyriakides, S., 1994, "Ratchetting of Cyclically Hardening and Softening Materials: II. Multiaxial Behavior," *Int. J. Plast.*, **10**(2), pp. 185–212.
- [19] Jiang, Y., and Sehitoglu, H., 1994, "Cyclic Ratchetting of 1070 Steel under Multiaxial Stress State," *Int. J. Plast.*, **10**(5), pp. 579–608.
- [20] Ohno, N., and Wang, J. D., 1994, "Kinematic Hardening Rules for Simulation of Ratchetting Behavior," *European Journal of Mechanics*, **13**, pp. 519–531.
- [21] Delobelle, P., Robinet, P., and Bocher, L., 1995, "Experimental Study and Phenomenological Modelization of Ratchet under Uniaxial and Biaxial Loading on an Austenitic Stainless Steel," *Int. J. Plast.*, **11**(4), pp. 295–330.
- [22] Geyer, P., 1995, "Modeling of Ratchetting in Biaxial Loading of the Stainless Steel 316 SPH between 20 and 600°C," *Proceedings of Plasticity'95*, pp. 563–596.
- [23] McDowell, D. L., 1995, "Stress State Dependence of Cyclic Ratchetting Behavior of Two Rail Steels," *Int. J. Plast.*, **11**(4), pp. 397–421.
- [24] Haupt, A., and Schinke, B., 1996, "Experiments on Ratchetting behavior of AISI 316L(N) Austenitic Steel a Room Temperature," *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, **118**, pp. 281–284.
- [25] Bouchou, A., and Delobelle, P., 1996, "Behavior and Modeling of a 17-12 SPH Stainless Steel under Cyclic, Uni and Bidirectional, Anisothermal Loadings. Part I: Behavior," *Int. J. Plast.*, **12**, pp. 295–303.
- [26] Corona, E., Hassan, T., and Kyriakides, S., 1996, "On the Performance of Kinematic Hardening Rules in Predicting a Class of Biaxial Ratchetting Histories," *Int. J. Plast.*, **12**(1), pp. 117–145.
- [27] Jiang, Y., and Sehitoglu, H., 1996, "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part I: Development of Constitutive Relations," *ASME J. Appl. Mech.*, **63**, pp. 720–725.
- [28] Jiang, Y., and Sehitoglu, H., 1996, "Modeling of Cyclic Ratchetting Plasticity, Part II: Comparison of Model Simulations With Experiments," *ASME J. Appl. Mech.*, **63**, pp. 726–733.
- [29] Bocher, L., and Delobelle, P., 1997, "Experimental Study of the Cyclic Behavior of a Stainless Steel under Complex Multiaxial Loadings in Tension-Torsion-Internal Pressure," *Proceedings of SMIRT*, **9**, pp. 51–58.
- [30] Ohno, N., 1997, "Recent Progress in Constitutive Modeling for Ratchetting," *Materials Science Research International*, **3**(1), pp. 1–9.
- [31] Portier, L., Calloch, S., Marquis, D., and Geyer, P., 2000, "Ratchetting under Tension-Torsion Loadings: Experiments and Modeling," *Int. J. Plast.*, **16**, pp. 303–335.
- [32] Bocher, L., Delobelle, P., Robinet, P., and Feaugas, X., 2001, "Mechanical and Microstructural Investigations of an Austenitic Stainless Steel Under Non-Proportional Loadings in Tension-Torsion-Internal and External Pressure," *Int. J. Plast.*, **17**(11), pp. 1491–1530.
- [33] Gaudin, C., and Feaugas, X., 2000, "On the origin of the ratchetting process in austenitic stainless steel AISI 316L at  $T < 0.4 T_m$ ," *Proceedings, Euromat 2000*, Miannay et al., Elsevier, Vol. **2**, pp. 1039–1046, Tours.
- [34] Cailletaud, G., 1992, "A Micromechanical Approach to Inelastic Behavior of Metals," *Int. J. Plast.*, **8**, pp. 55–73.
- [35] Ohno, N., and Wang, J. D., 1993, "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery: Part I-Formulation and Basic Features for Ratchetting Behavior," *Int. J. Plast.*, **9**, pp. 375–390.
- [36] Burlet, H., and Cailletaud, G., 1987, "Modeling of Cyclic Plasticity in Finite Element Codes," *Proc. of Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications*, Desai et al., ed., Elsevier, Tucson, AZ, pp. 1157–1164.
- [37] Bari, S., and Hassan, T., 2000, "Anatomy of Coupled Constitutive Models for Ratchetting Simulation," *Int. J. Plast.*, **16**, pp. 381–409.
- [38] Phillips, A., and Tang, J.-L., 1972, "The Effect of Loading Path on the Yield Surface at Elevated Temperatures," *Int. J. Solids Struct.*, **8**, pp. 463–474.
- [39] Marjanovic, R., and Szczepinski, W., 1975, "On the Effect of Biaxial Cyclic Loading on the Yield Surface of M-63 Brass," *Acta Mech.*, **23**, pp. 65–74.
- [40] Phillips, A., and Lee, C.-W., 1979, "Yield Surfaces and Loading Surfaces. Experiments and Recommendations," *Int. J. Solids Struct.*, **15**, pp. 715–729.
- [41] Phillips, A., and Lu, W.-Y., 1984, "An Experimental Investigation of Yield Surfaces and Loading Surfaces of Pure Aluminum with Stress-controlled and Strain-controlled Paths of Loading," *ASME J. Eng. Mater. Technol.*, **106**, pp. 349–354.
- [42] Stout, M. G., Martin, P. L., Helling, D. E., and Canova, G. R., 1985, "Multiaxial Yield Behavior of 1100 Aluminum Following Various Magnitudes of Prestrain," *Int. J. Plast.*, **1**, pp. 163–174.
- [43] Rousset, M., 1985, "Surface Seuil de Plasticité: Détermination Automatique et Modélisation," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.
- [44] Wu, H. C., and Yeh, W. C., 1991, "On the Experimental Determination of Yield Surfaces and Some Results of Annealed 304 Stainless Steel," *Int. J. Plast.*, **7**, pp. 803–826.
- [45] Khan, A. S., and Wang, X., 1993, "An Experimental Study on Subsequent Yield Surface after Finite Shear Prestraining," *Int. J. Plast.*, **9**, pp. 889–905.
- [46] Szczepinski, W., and Miastkowski, J., 1994, "On Experimental Studies of Yield Surfaces of Metals: A More General Approach," *Arch. Mech.*, **46**(1–2), pp. 151–176.
- [47] Kurtyka, T., and Zyczkowski, M., 1985, "A Geometric Description of Distortional Plastic Hardening of Deviatoric Materials," *Arch. Mech.*, **37**(4–5), pp. 383–395.
- [48] Kurtyka, T., and Zyczkowski, M., 1996, "Evolution Equations for Distortional Plastic Hardening," *Int. J. Plast.*, **12**(2), pp. 191–213.
- [49] Pilvin, P., 1990, "Approches Multiéchelles pour la prévision du Comportement anélastique des métaux," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.
- [50] Pilvin, P., and Geyer, P., 1997, "Modeling of Uniaxial and Multiaxial Ratchetting of SS 316SPH by a Polycrystalline Approach," *Technical Report HT-2C/97/065/A*, EDF, Lyon.
- [51] Vincent, L., Calloch, S., François, M., and Marquis, D., 2000, "Ratchetting modeling though yield surface distortion," *Proceedings, Euromat 2000*, Miannay et al., Elsevier, Vol. **1**, pp. 469–474, Tours.
- [52] Armstrong, P. J., and Frederick, C. O., 1966, "A Mathematical Representation of the Multiaxial Baushinger Effect," *CEGB Report RD/B/N731*, Berkeley Nuclear Laboratories.
- [53] Marquis, D., 1979, "Modélisation et Identification de l'Écrouissage Anisotrope des Métaux," Ph.D. thesis, Université Paris 6, Paris.
- [54] Ohno, N., and Wang, J. D., 1993, "Kinematic Hardening Rules with Critical State of Dynamic Recovery: Part II-Application to Experiments of Ratchetting Behavior," *Int. J. Plast.*, **9**, pp. 391–403.
- [55] Cailletaud, G., and Pilvin, P., 1993, "Identification and Inverse Problems: a Modular Approach," *ASME Winter Annual Meeting on Material Parameter Estimation for Modern Constitutive Equations*, pp. 33–45, New-Orleans.
- [56] Portier, L., 2000, "Contribution à l'Étude de la Déformation Progressive des Structures," Ph.D. thesis, ENS-Cachan, Cachan.